B - 13 CALCULATION OF RF CAVITIES WITH AXI-SYMMETRY

BY FINITE ELEMENT METHOD

Masahiro Hara, Takeshi Wada, Fumio Kikuchi* and Masatoshi Odera
The Institute of Physical and Chemical Research, and University of Tokyo*

ABSTRACT

Two computer programs are developed to find electromagnetic resonance frequency and evaluate the field in rf cavities. One is for waveguide with an arbitrary cross sectional shape and is used to evaluate RFQ cavities. The other code is for cavities with axi-symmetry. Calculated results by the latter code agree with those by the code SUPERFISH.

§1. 始めに

加速器のRF Resonatorを設計するには 金属で囲まれた空洞内に許される電磁波の固有モードの計算が必要である。三次元的に任意形状のものに対しては解くのがかなり困難である。現在の所、一方向に一様な形状をもつ導波管の場合とか、軸対称性をもつ場合のように、結局は二次元の問題に還元できるものに対しては、信頼性のあるプログラムが開発されている[1]。筆者等は有限要素法を用いて、この様な電磁波の固有振動モードの計算プログラムを開発してきた。ここでは完全導体で包まれた導波管の計算と軸対称のCavity Resonatorの計算例について報告する。前者は最近話題になっているRFQの設計に、後者はAlvarez型リニアックの設計に利用できる。軸対称の場合の計算はLos Alamosで開発されたSUPERFISH[2]と比較して非常に良い一致を示した。

§2. 任意断面形状の導波管[3,4]

電荷も電流も存在しない場合、一様な電媒質に対して定常状態のMaxwell方程式は

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{E} + j\omega\mu\,\mathbb{H} = 0 , \quad \mathrm{div}\,\mathbb{H} = 0$$
$$\mathrm{rot}\,\mathbb{H} - j\omega\varepsilon\,\mathbb{E} = 0 , \quad \mathrm{div}\,\mathbb{E} = 0 \qquad (1)$$

となる。(1)を解くのにいくつか方法があるが、ここでは電気的及び磁気的Hertzベクトルを導入し、そのZ成分をΦ及びΨとすると、(1)は

$$\Delta\Phi + \omega^2\varepsilon\mu\Phi = 0$$
$$\Delta\Psi + \omega^2\varepsilon\mu\Psi = 0 \qquad (2)$$

を満足する二つのスカラー関数Φ, Ψを用いて、

$$E_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} + j\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial y} , \quad H_x = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} - j\omega\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$
$$E_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - j\omega\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x} , \quad H_y = \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z} + j\omega\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad (3)$$
$$E_z = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \omega^2\varepsilon\mu\Phi , \quad H_z = \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \omega^2\varepsilon\mu\Psi$$

とおくことにより全て満たされる。金属壁では$E_t = 0$, $H_n = 0$なので境界条件は

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0 \qquad (4)$$

となる。但し t は接線成分，n は法線成分を示す。　常に $\mathbf{E}=0$ で $\mathbf{H}$ のみが存在する場合と，常に $\mathbf{H}=0$ で $\mathbf{E}$ のみが存在する場とは分離して存在でき，前者は H mode（TE mode）であり，後者は E mode（TM mode）である。

(2) の Helmholtz 方程式を解くのに有限要素法を用いた。有限要素法の詳しい説明はここでは省略し，計算例としては最近話題となっている RFQ Cavity への応用を考えた。RFQ の代表的なものに Four Vane 型のものがあるが，この場合の mode は本来 H mode であるので断面形状が一定の導波管で近似して計算した。Fig. 1 に cut-off 周波数と電気力線の計算例を示した。これは Los Alamos の RFQ を頭に描いて計算したものである。

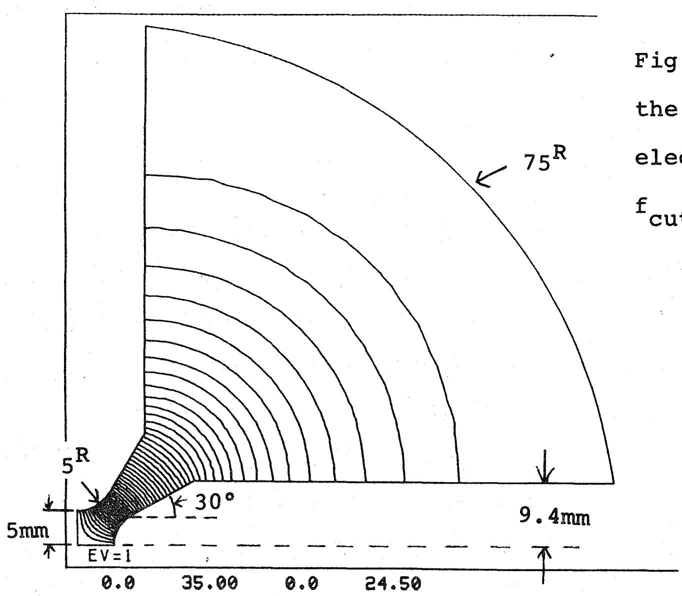


Fig. 1　1/4 cross sectional view of the calculated RFQ model and the electric field lines.

$f_{cut\text{-}off} = 441.8404$ MHz

§3　軸対称 Cavity Resonator の計算

リニアックの cavity のための計算プログラムは多くの人々が開発していて LALA，JESSY，MESSYMESH，SUPERFISH 等が知られている。これらのものは軸対称の場合に使用でき，殆んどが差分法で計算されている。

3－1. Cavity 内の電磁波

Maxwell の式は (1) より

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{H}) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H} = 0 \qquad (5)$$

となり，完全導体の壁を考えると，境界条件は

$$H_n = 0, \qquad E_t = 0 \qquad (6)$$

となる。

3－2. 汎関数

(5)，(6) を解くのに有限要素法では，変分法の直接法を用いる。(5) を Euler 方程式とする汎関数は

$$F(\mathbf{H}) = \iiint (|\mathrm{rot}\,\mathbf{H}|^2)\,dv - k^2 \iiint |\mathbf{H}|^2 \, dv \qquad (7)$$

で与えられる。ここで磁場が $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\theta H_\theta$ で表わせる特別な場合のみを考える。これは Alvarez 型リニアックの様に TM mode（E mode）でしかも θ 方向に

mode を持たない場合に対応する。この時 (7) は

$$F(H_\theta) = 2\pi \iint \left\{ r\left[\left(\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{H_\theta}{r} + \frac{\partial H_\theta}{\partial r}\right)^2\right] - k^2 \frac{H_\theta^2}{r} \right\} dr\,dz \qquad (8)$$

となり、Fの変分を0とおくことにより (5)の Euler 方程式と自然境界条件が得られ、後者は $E_t = 0$ となる。

(8)を有限要素に分割して積分する場合、$\frac{1}{r}$による発散を回避するのに2つの方法がある。一つはKonrad[4]が行ったように、変数変換を行って$\frac{1}{r}$の項を消す方法であり、もう一つは $r=0$ の点を避けて数値積分を行う方法である。筆者等は前者の方法を採用した。つまり、

$$H_\theta = \sqrt{r}\,A \qquad (9)$$

とおき換えることにより (8)は

$$F(A) = 2\pi \iint \left[r^2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}A + r\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 - k^2 r^2 A^2 \right] dr\,dz \qquad (10)$$

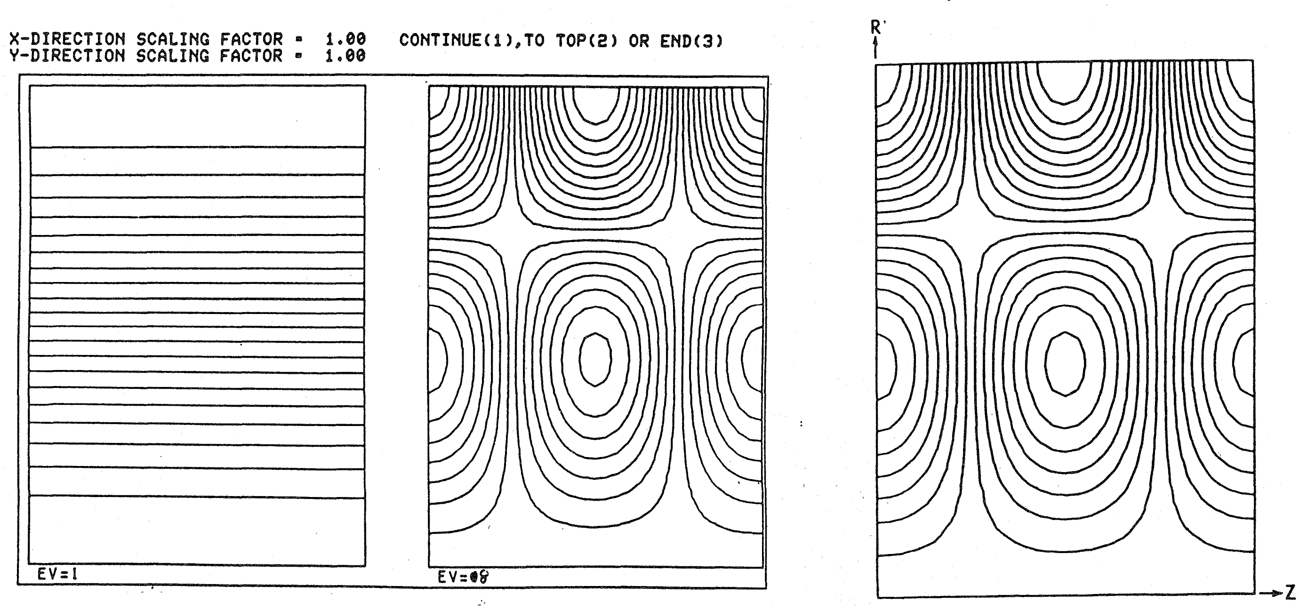
となる。

3-3 有限要素法

有限要素法では空間的な場の問題を仮想的な要素に分割、総合して解析する。我々のプログラムは要素として最も簡単な3節点からなる三角要素をとり、一次試験関数を用いて計算している。

3-4. SUPERFISH との比較

SUPERFISH は HALBACH[3]等によって開発された軸対称 Cavity 用のプログラムである。彼らが TEST 計算した半径 88 cm 軸方向長 60 cm の円筒 Cavity の場合を、我々のプログラムで計算した結果と比較したのが Fig. 2 及び表 1 である。



2-a Electric field lines for mode No.1

2-b Electric field lines for mode No,8

[redacted] Electric field lines (rH = const) for mode No. 8 in test cavity.

2-c Halbach et al[3]

Fig. 2 Electric field lines. Figure 2-a and 2-b are the results obtained by our program and 2-c is calculated by Halbach el al.

図2では才8モードの電気力線の比較をし、表1では、基本及び才8モードの共振周波数の比較をしているが、非常に良い一致を示している。

又Alvarez型リニアックCavityの単純な形状の場合も比較して結果をFig.3に示している。SUPERFISHは倍精度で計算を行い、我々のプログラムは単精度であるが、やはり非常に良い一致を示している。

Tbale 1 Resonance frequency

	mode No.1	mode No.8
Theoretical Value	130.389 MHz	582.44 MHz
SUPERFISH	error $1X10^{-4}$	583.59 MHz
Present Case	130.427 MHz	584.11 MHz

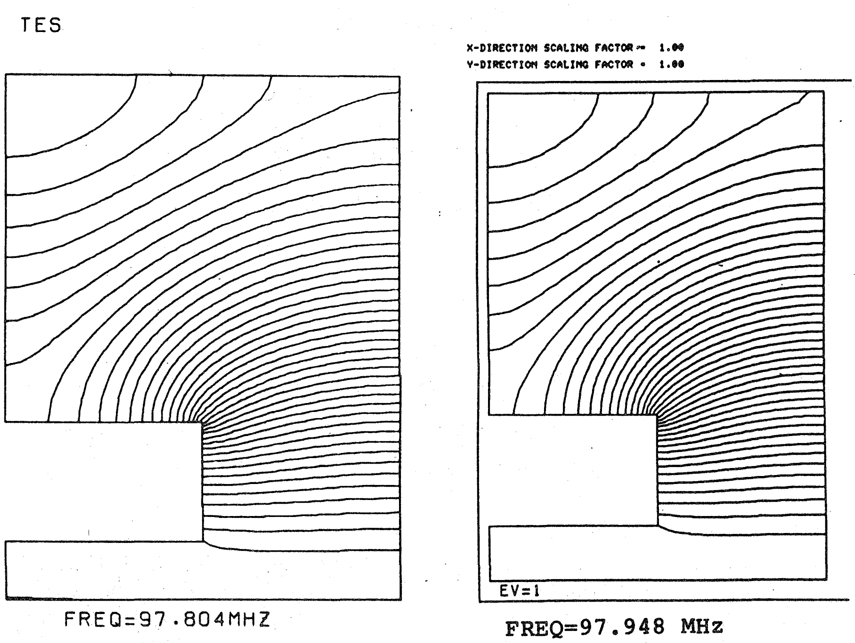


Fig.3 Electric field lines and resonance frequency
a--SUPERFISH
B--present case

REFERENCES

1. J.S.Colonias, Particle Accelerator Design: Computer Programs, Academic Press NY 1974
2. K.Halbach and R.F.Holsinger, Particle Accelerators 7,p213(1976).
3. 寺沢寛一：自然科学者のための 数学概論. 応用編 D. 第3章
4. A.Konrad, IEEE Trans. Nucl.Sci. NS-20,p802-808(1973).