

# DEVELOPMENT OF FINITE ELEMENT CODE RAMAX FOR THE ANALYSIS OF 3-D ELECTROMAGNETIC RESONANT FIELD

Yasuyuki Miyauchi, G-W. Ye\*, Genki Yagawa\*

Advanced Technology, Development Dept.,

Ishikawajima Harima Heavy Industries Co., Ltd.

\* Faculty of Nuclear Eng., University of Tokyo.

## Abstract

A finite element code for the analysis of 3-dimensional electromagnetic resonant field is developed. Divergence free condition is included in the code by penalty function method. Matrix equation ( unsymmetrical general eigenvalue equation ) is solved by inverse power method.

Calculated eigenvalues coincide with analytical ones with good accuracy.

## 3次元共鳴電磁場解析コードRAMAXの開発

### 1. 序 論

線形加速器の加速管やシンクロトロン・蓄積リングの加速空洞の設計に当たっては、定評あるコードSUPERFISH, URMEL等を用いることが多い。しかしこのようなコードは基本的に軸対称形状を取り扱うものであるのに反して実形状では非軸対称性が避けられないため、最終的には実測に依らなければその特性を予測することができない場合が多い。このような問題を解決するために幾つかの3次元解析コードが開発されている<sup>[1]</sup>が、十分に実用的なものはまだ開発されていない。

そこで、今回多次元問題の解析に適した手法である有限要素法による3次元解析コードRAMAX ( RESONANCE ANALYSIS CODE FOR MAXWELL EQUATION ) を独自に開発した。このコードでは、ペナルティ関数法を用いて電磁場の発散を零としている。また、2次元および2.5次元の問題の解析も可能である。コードは現在開発中であるが、本報告では、その概要と解法の妥当性について示す。

### 2. 有限要素法による定式化

加速空洞内共鳴電磁場は、良く知られているように、次のような固有値問題の解である。

表1. 基礎方程式

		電 場	磁 場	式の番号
固有値方程式		$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$	$\nabla^2 \mathbf{B} + k^2 \mathbf{B} = 0$	( 1. a, b )
拘束条件		$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	( 2. a, b )
境界条件	I 導体壁	$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$	$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$	( 3. a, b )
	II 対称面	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$	$\mathbf{B} \times \mathbf{n} = 0$	( 3. c, d )

式(1~3)から分るように、境界条件の取扱いを除けば、電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ の式は完全に同じであるので、以上では $\mathbf{E}$ についての定式化を示す。

この式(1~3)を解くことは、ペナルティ有限要素法では次の汎関数の停留問題を解くことに置き換えることができる。

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \quad (4)$$

$$\Pi_1 = \int \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot (\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} d\Omega \quad (5. a)$$

$$\Pi_2 = \chi_1 \int \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{E})^2 d\Omega \quad (5. b)$$

$$\Pi_3 = \chi_2 \left\{ \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{n} + \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})^2 \right\} \quad (5. c)$$

ここで、 $\chi_1, \chi_2$ はそれぞれ拘束条件( $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ )と境界条件を算入するためのペナルティパラメータである。この $\chi_1, \chi_2$ を非常に大きくしてゆけば、桁落ちがない限り、(4)の停留解は(1~3)の解に近づくと期待することができる。

求める電場ベクトルを $\{E_i^\alpha\}$ ( $\alpha$ : 節点,  $i$ : 座標成分)として表わし、停留条件を、

$$\partial(\delta \Pi) / \partial(\delta E_i^\alpha) = 0 \quad (6)$$

とすると、次の行列方程式が得られる。

$$\mathbf{K} \mathbf{E} = k^2 \mathbf{M} \mathbf{E} \quad (7)$$

これは、一般固有値問題であり、簡単のためデカルト座標で成分を書くと次のようになる。

$${}^i_a K^j_\beta E_i^\beta = k^2 {}^i_a M^j_\beta E_i^\beta \quad (8)$$

$${}^i_a K^j_\beta = \int (\sum_k \Psi_{\alpha,k} \Psi_{\beta,k}) d\Omega \delta_{ij} - \int \Psi_\alpha (\sum_k \Psi_{\beta,k} d\Gamma_k) \delta_{ij} + \chi_1 \int \Psi_{\alpha,i} \Psi_{\beta,j} d\Omega \\ + \chi_2 \left\{ \int (\Psi_\alpha \Psi_\beta n_i n_m \sigma_i \sigma_m) + \int (\Psi_\alpha \Psi_\beta n_i n_j) \right\} \quad (9. a)$$

$${}^i_a M^j_\beta = \int \Psi_\alpha \Psi_\beta d\Omega \delta_{ij} \quad (9. b)$$

式(9. a)から分るように、(7)は非対称一般固有値問題である。

固有値問題は近年効率の良い解法が開発されているが、本研究では行列が非対称であることと、大量のデータを取り扱うために行列のスパース(疎)性を利用する代表的手法であるスカイライン法を用いる必要があることのために、基本的な解法である逆反復法を用いた<sup>[2]</sup>。これは、行列固有値方程式(7)を、適当な出発値を用いて次のような逐次近似で解き進む解法である。

$$\mathbf{E}_{k+1} \leftarrow \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{M} \mathbf{E}_k), \quad k^2 \simeq (\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_k) / (\mathbf{E}_{k+1}, \mathbf{E}_k) \quad (10. a, b)$$

また、逆反復法では、最小固有値をもつ解しか求められないので、固有ベクトルが求められる毎に、これを Schmidt 直交化法によって取り除いておくことによって、順次に高次解を求めてゆく。

ここで、例えば座標を2次元、電場を3成分とし、独立でない空間座標成分を Fourier 分解すれば、2.5次元の計算ができる。本コードの機能を加速空洞の設計に良く使われる既存のコードと比較すると次のようになる<sup>[1]</sup>。

表 2. シミュレーションコードの機能比較表

次元	デカルト座標	円柱座標
2次元	一般的	SUPERFISH, LALA
2.5次元	一般的	URMEL, 原・菊地 ULTRAFISH
3次元	URUMEL-3D 原・菊地	

### 3. 計算結果

本コードは現在開発中であるため、ここでは解の精度についての検証例を示す。

#### (1) 25次元

座標が2次元、場が3次元の場合について計算例を示す。

##### 1) デカルト座標

まず、図1の形状について、固有値は解析的には

$$k^2 = \pi^2 \left\{ \left( \frac{m}{2} \right)^2 + \left( \frac{n}{1.5} \right)^2 \right\} + 2^2 \quad (11)$$

で求められる。これを本コードによる計算結果と比較すると、次の表を得る。

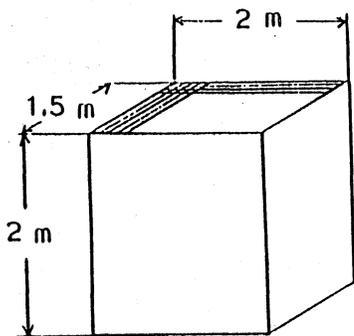


表 3. 2.5次元問題 (デカルト座標) の解の精度比較表

(m, n)	Anal.	Calc.	Error (%)
(1, 0)	6.467	6.469	0.03
(0, 1)	8.387	8.417	0.36
(1, 1)	10.854	10.890	0.37

図 1. 2.5次元形状図 (格子 21×11)

##### 2) 円柱座標

次は、図2に示す円筒空洞内の軸対称場の計算結果を比較する。これは、SUPERFISHと同じ機能である。計算結果を波長で比較すると次の表を得る。

また、代表的な電磁場の分布を図3に示す。この計算結果は、要素分割を比較的細かくすることによって、高次解を精度良く求めることができることを示している。

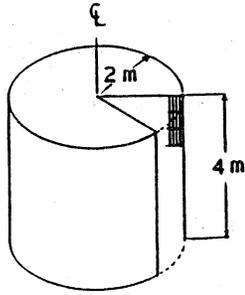


図 2. 円柱対称形状図 (格子 21×11)

表 4. 円柱対称問題の解の精度比較表

Mode	Anal.	Comp.	Error (%)
TM 010	5.22	5.23	0.2
TM 011	4.37	4.54	3.8
TE 011	3.03	3.00	1.0
TE 012	2.54	2.52	0.8
TM 013	2.38	2.37	0.4

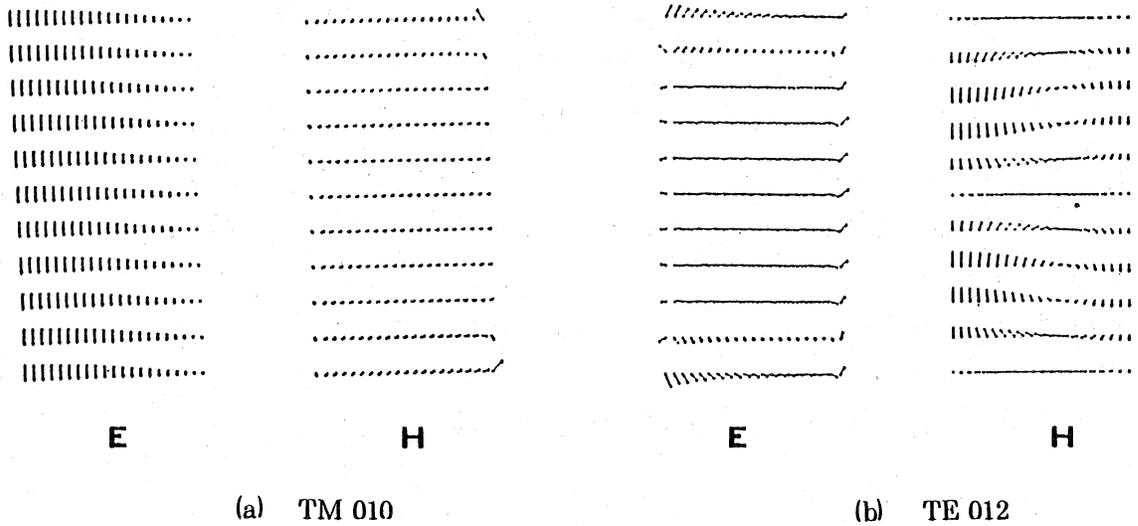


図 3. 代表的電磁場分布

### 3) 3 次元

図 4 に示す 3 次元直方体空間内の共鳴についての計算例を示す。この例では、固有値は次式で表わされる。

$$k^2 = \pi^2 \left\{ \left(\frac{l}{6}\right)^2 + \left(\frac{m}{5}\right)^2 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 \right\} \quad (12)$$

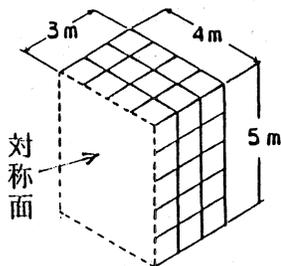


図 4. 3 次元形状図

表 5. 3 次元問題の解の精度比較表

(l, m, n)	Anal.	Calc.	Error (%)
(1, 1, 0)	0.669	0.650	2.8
(1, 0, 1)	0.891	0.883	4.3
(0, 1, 1)	1.012	1.063	5.0
(1, 1, 1)	1.286	1.302	1.2
(2, 1, 0)	1.491	1.403	5.9
(1, 2, 0)	1.853	1.915	3.3

この計算結果は、要素分割が粗いにも拘らず、良好な固有値が得られていることを示す。

#### 4. 計算システム

有限要素法解析における最大の問題点は、大量の入出力データの処理である。本システムでは、この問題を解決するために VAX の汎用図形処理システムである SUPERTAB と、本体プログラムを連結させている。すなわち、VAX-SUPERTAB によって、グラフィック端末を用いて入力データを生成し、次にこれを大型機 (FACOM) に転送して、そのフルスクリーンエディターで追加修正することによりデータを完成する。

計算は大型機で行い、その出力データを VAX に転送し、再び SUPERTAB を用いてグラフィック端末上で実時間で図形出力する。その具体的な流れは、図 5 のとおりである。

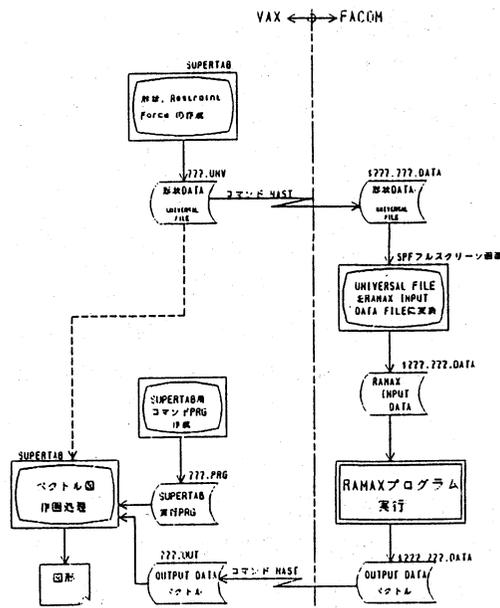


図 5. システム構成図

#### 5. 結 論

粒子加速器の加速空洞用の共鳴電磁場を多次的 (2次元, 2.5次元, 3次元) に解析する有限要素法コードを開発した。簡単な空洞形状の場合の固有値を解析解と計算解で比較した結果、良好な結果を得た。

また、汎用入出力ソフトウェアと連結することにより作業効率を向上させた。

本コードは開発中であるので、今後は解の精度を更に向上させるとともに、所要メモリーの低減等を行い、複雑な実形状に適用してゆく予定である。

#### 参 考 文 献

- [1] 肥後寿泰：高周波加速空洞の設計，高エネルギー加速器セミナー（1985）。  
本文献は、RFシミュレーションの優れたレビューになっている。
- [2] 戸川隼人：有限要素法による振動解析，サイエンス社（昭和50年）。