

ビーム位置及び相対モーメント測定に於ける再帰的計算 RECURSIVE CALCULATION ON BEAM POSITION AND RELATIVE MOMENT MEASUREMENTS

柳田謙一*, 鈴木伸介, 花木博文
Kenichi Yanagida*, Shinsuke Suzuki, Hirofumi Hanaki
Japan Synchrotron Radiation Research Institute

Abstract

Six-electrode beam position monitors (BPMs) are used for a measurement of second-order relative moment in the SPring-8 linac. A correction with up to fifth-order moments was adopted for more precise measurement. To execute the calculation we employed a multivariable recursive calculation that is an algorithm of successive iteration in the specified region of interest. The region was that a distance of beam centroid from the origin was within 5 mm, an amplitudes of a second-order relative moment was within 25 mm² and an amplitudes of a third-order relative moment was within 50 mm³. A simulation result shows that the recursive calculations converged for all (531,441) set points in the region and that a calculation error was smaller than that of calculation without correction.

1. はじめに

SPring-8 線型加速器に於いて横方向 (Transverse) ツイスパラメータ測定やトップアップ運転中のビーム形状監視の為に 2010 年頃から六電極 BPM の整備を行ってきた [1][2]。

SPring-8 線型加速器円形断面六電極 BPM を使用した場合、電極出力電圧の差分を取る事より得られる物理量は 5 つの絶対モーメントで、それらは一次絶対モーメント (ビーム重心位置、以下『ビーム位置』と記す) P_1, Q_1 、二次絶対モーメント P_2, Q_2 及び三次絶対モーメント Q_3 である [3]。

我々がツイスパラメータ測定等で必要となるビーム形状に由来する二次相対モーメント P_{g2} は P_2 から二次重心モーメント p_{G2} を引いた値、すなわち $P_{g2} = P_2 - p_{G2}$ である為、 P_2 のみならずビーム位置 P_1, Q_1 も良い精度で測定される必要がある。

BPM を使用した測定に於いて、高次モーメント補正を行わない場合に、ビーム位置が BPM 機械中心 (原点) に近い場合、ビーム位置や高次相対モーメントの測定誤差が小さくなる事が知られている [4]。

逆に云うと、ビーム位置が原点から離れて行くに従って、ビーム位置や高次相対モーメントの影響が顕著に現れるため、高次モーメントによる補正が必要な事を示している。四電極 BPM を使用して、ビーム位置の三次項までを補正項として組み込んで計算した例もある [5][6]。

高次モーメントがビーム位置測定に影響を与えるため、補正を必要とする考えは、我々が 2013 年加速器学会年会にて発表した [7]。当初、三次モーメントまでの補正で十分であると考えたが、ツイスパラメータを計算する際、エミッタンス項が無限小となる問題が発生し、調査の結果、得られた二次相対モーメントの数値誤差が大きいたことが原因であると判明した。その結果、最終的に五次モーメントまでの補正を採用するに至ったのである [2]。

本年会では、より正確な P_{g2} を得るための五次モー

メントまでの補正とその補正を確実に実行するための再帰的計算手法に就いて述べる。

2. 五次までの補正を行う場合の関係式

2.1 絶対・相対・重心モーメントの関係式

五次までの絶対モーメント P_n, Q_n 、相対モーメント P_{gn}, Q_{gn} 及び重心モーメント p_{Gn}, q_{Gn} の一般的な関係は Eqs. (1), (2) で表される ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) [3]。

$$\begin{aligned}
 P_2 &= p_{G2} + P_{g2}, & Q_2 &= q_{G2} + Q_{g2}, \\
 P_3 &= p_{G3} + 3p_{G1}P_{g2} - 3q_{G1}Q_{g2} + P_{g3}, \\
 Q_3 &= q_{G3} + 3q_{G1}P_{g2} + 3p_{G1}Q_{g2} + Q_{g3}, \\
 P_4 &= p_{G4} + 6p_{G2}P_{g2} - 6q_{G2}Q_{g2} \\
 &\quad + 4p_{G1}P_{g3} - 4q_{G1}Q_{g3} + P_{g4}, \\
 Q_4 &= q_{G4} + 6q_{G2}P_{g2} + 6p_{G2}Q_{g2} \\
 &\quad + 4q_{G1}P_{g3} + 4p_{G1}Q_{g3} + Q_{g4}, \\
 P_5 &= p_{G5} + 10p_{G3}P_{g2} - 10q_{G3}Q_{g2} + 10p_{G2}P_{g3} \\
 &\quad - 10q_{G2}Q_{g3} + 5p_{G1}P_{g4} - 5q_{G1}Q_{g4} + P_{g5}, \\
 Q_5 &= q_{G5} + 10q_{G3}P_{g2} + 10p_{G3}Q_{g2} + 10q_{G2}P_{g3} \\
 &\quad + 10p_{G2}Q_{g3} + 5q_{G1}P_{g4} + 5p_{G1}Q_{g4} + Q_{g5}. \\
 p_{G1} &= P_1, & q_{G1} &= Q_1, \\
 p_{G2} &= P_1^2 - Q_1^2, & q_{G2} &= 2P_1Q_1, \\
 p_{G3} &= P_1^3 - 3P_1Q_1^2, & q_{G3} &= 3P_1^2Q_1 - Q_1^3, \\
 p_{G4} &= P_1^4 - 6P_1^2Q_1^2 + Q_1^4, \\
 q_{G4} &= 4P_1^3Q_1 - 4P_1Q_1^3, \\
 p_{G5} &= P_1^5 - 10P_1^3Q_1^2 + 5P_1Q_1^4, \\
 q_{G5} &= 5P_1^4Q_1 - 10P_1^2Q_1^3 + Q_1^5,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Equation (1) に於いて、SPring-8 線型加速器六電極 BPM の場合は $P_{g3}, P_{g4}, Q_{g4}, P_{g5}, Q_{g5}$ が測定出来ず、仮にビームが零でない値を持ったとしても便宜上零と見做す。すなわち、

$$P_{g3} = P_{g4} = Q_{g4} = P_{g5} = Q_{g5} = 0 \tag{3}$$

*ken@spring8.or.jp

とする。

2.2 信号電圧差分

Figure 1 は SPring-8 線型加速器で使用されている円形断面六電極 BPM の断面図である。この BPM を使

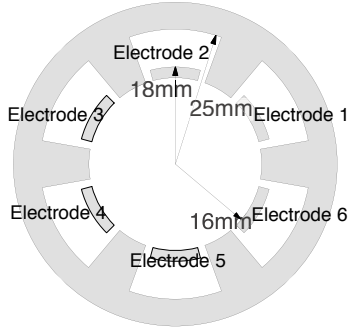


Figure 1: Cross-sectional view of the six-electrode BPM with circular cross-section for the SPring-8 linac.

用する場合、選ばれる信号電圧差分は Eq. (4) の通りである。

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{V_1 - V_3 - V_4 + V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6}, \\ S_1 &= \frac{V_1 + V_3 - V_4 - V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6}, \\ C_2 &= \frac{V_1 + V_3 + V_4 + V_6 - 2(V_2 + V_5)}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6 + 2(V_2 + V_5)}, \\ S_2 &= \frac{V_1 - V_3 + V_4 - V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6}, \\ S_3 &= \frac{V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + V_5 - V_6}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6}. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 V_1, \dots, V_6 は各電極 (Fig. 1 参照) の信号電圧振幅である [3]。

2.3 信号電圧差分から各次モーメントの算出

SPring-8 線型加速器六電極 BPM で測定され得る絶対モーメントは P_1, Q_1, P_2, Q_2 及び Q_3 であるが、それらと Eq. (4) の信号電圧差分との関係は、補正された信号電圧差分 $C_1^\dagger, S_1^\dagger, C_2^\dagger, S_2^\dagger$ 及び S_3^\dagger を使用して Eq. (5) のように表せるとする。

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{R_{C1P1}}{2} C_1^\dagger, \quad Q_1 = \frac{R_{S1Q1}}{2} S_1^\dagger, \\ P_2 &= \frac{R_{C2P2}^2}{2} C_2^\dagger, \quad Q_2 = \frac{R_{S2Q2}^2}{2} S_2^\dagger, \\ Q_3 &= \frac{R_{S3Q3}^3}{2} S_3^\dagger. \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 R_{C1P1} 等は電場計算等により求まる実効開口半径であり、Table 1 の通りである。

2.3.1 基本次のみのモーメント計算 基本次のみを用いた場合、補正された信号電圧差分は Eq. (4) の信号電圧差分と等しく Eq. (6) の通りである。

$$C_1^\dagger = C_1, \quad S_1^\dagger = S_1, \quad C_2^\dagger = C_2, \quad S_2^\dagger = S_2, \quad S_3^\dagger = S_3. \quad (6)$$

Table 1: Effective Aperture Radii (fundamental) [mm]

R_{C1P1}	18.688	R_{S1Q1}	32.368		
R_{C2P2}	18.906	R_{S2Q2}	17.594	R_{S3Q3}	16.570

2.3.2 三次までの補正を行うモーメント計算 三次までの補正を行う場合、補正された信号電圧差分は Eq. (7) の通りとなる。

$$\begin{aligned} C_1^\dagger &= C_1 \left(1 + \frac{2P_2}{R_{C1P2d}^2} \right), \\ S_1^\dagger &= S_1 \left(1 + \frac{2P_2}{R_{S1P2d}^2} \right) - \frac{2Q_3}{R_{S1Q3u}^3}, \\ C_2^\dagger &= C_2 \left(1 - \frac{2P_2}{R_{C2P2d}^2} \right), \\ S_2^\dagger &= S_2 \left(1 + \frac{2P_2}{R_{S2P2d}^2} \right), \quad S_3^\dagger = S_3. \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 R_{C1P2d} 等は電場計算等により求まる実効開口半径であり、Table 2 の通りである。

Table 2: Effective Aperture Radii (3rd-order) [mm]

R_{C1P2d}	23.155	R_{S1P2d}	23.155	R_{S1Q3u}	16.570
R_{C2P2d}	32.746	R_{S2P2d}	23.155		

2.3.3 五次までの補正を行うモーメント計算 五次までの補正を行う場合、補正された信号電圧差分は Eq. (8) の通りとなる。

$$\begin{aligned} C_1^\dagger &= C_1 \left(1 + \frac{2P_2}{R_{C1P2d}^2} - \frac{2P_4}{R_{C1P4d}^4} \right) + \frac{2P_5}{R_{C1P5u}^5}, \\ S_1^\dagger &= S_1 \left(1 + \frac{2P_2}{R_{S1P2d}^2} - \frac{2P_4}{R_{S1P4d}^4} \right) - \frac{2Q_3}{R_{S1Q3u}^3} - \frac{2Q_5}{R_{S1Q5u}^5}, \\ C_2^\dagger &= C_2 \left(1 - \frac{2P_2}{R_{C2P2d}^2} + \frac{2P_4}{R_{C2P4d}^4} \right) + \frac{2P_4}{R_{C2P4u}^4}, \\ S_2^\dagger &= S_2 \left(1 + \frac{2P_2}{R_{S2P2d}^2} - \frac{2P_4}{R_{S2P4d}^4} \right) - \frac{2Q_4}{R_{S2Q4u}^4}, \quad S_3^\dagger = S_3. \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 R_{C1P4d} 等は電場計算等により求まる実効開口半径であり、Table 3 の通りである。

Table 3: Effective Aperture Radii (5th-order) [mm]

R_{C1P4d}	19.953	R_{C1P5u}	17.499	R_{S1P4d}	19.953
R_{S1Q5u}	19.531	R_{C2P4d}	23.728	R_{C2P4u}	18.029
R_{S2P4d}	19.953	R_{S2Q4u}	17.392		

Equations (7) 及び (8) を見ると、ビーム位置や高次相対モーメントが零に近づく場合、補正項 ($2P_2/R_{C1P2d}^2$ 等) も零に近づく。これは、ビーム位置が原点付近で且つビームの高次相対モーメントが十分小さい場合、高次モーメント補正を行わなくてもビーム位置や高次相対モーメントが正確に測定できる事を意味する。

3. 再帰的計算

五次までの補正を行う場合、各次モーメントの算出には、Eqs. (5) 及び (8) を併せて解くことになる。しかしながら、例えば Eq. (5) で P_2 を求める際は、Eq. (8) C_2^\dagger 中の P_2 及び P_4 の値が必要な形式、すなわち、自己無撞着な形式のため、そのままでは解が得られず、計算には何らかの工夫が必要となる。

我々は条件さえ整えば、一変数の逐次近似法と同様な手法が多変数でも適用可能であろうと考え以下の手法を考案した。

3.1 一変数逐次近似法

変数が一つの場合、条件さえ整えば再帰的計算手法（逐次近似法）で解が得られる。変数 x の関数 $f(x)$ が $x = f(x)$ と表される時、適当な初期値を x_0 とし、 $x_1 = f(x_0) \rightarrow x_2 = f(x_1) \rightarrow x_3 = f(x_2) \rightarrow x_4 = f(x_3) \rightarrow \dots$ と逐次代入した際、無限回代入した結果が解として得られるものである。但し、興味ある領域（ROI = Region of Interest）内で $f(x)$ が滑らかな単調な関数で、且つ $|df(x)/dx| < 1$ を満たす必要がある（Fig. 2 参照）。

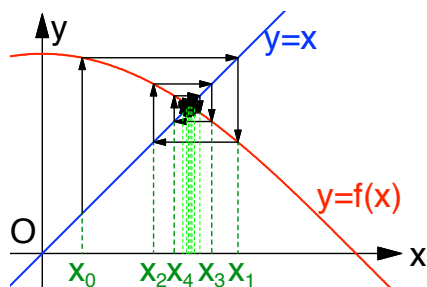


Figure 2: Convergence diagram of the successive iteration in the case of $x = \cos x$.

逐次近似法は一般的には収束が遅いと知られているが、 $|df(x)/dx| \sim 0$ の場合は比較的収束が速い。

3.2 多変数逐次近似の可能性

SPRING-8 線型加速器六電極 BPM では、5 個の等式 (Eq. (5) 参照) で 5 変数 (P_1, Q_1, P_2, Q_2, Q_3) の解を求めるのであるが、これらは互いに独立ではなく、独立変数は $P_1, Q_1, P_{g2}, Q_{g2}, Q_{g3}$ の方である。但し、Eqs. (1), (2) 及び (3) を使えば、 $P_1, Q_1, P_{g2}, Q_{g2}, Q_{g3} \rightleftharpoons P_1, Q_1, P_2, Q_2, Q_3$ と双方向に変換可能な為、変数としてはどちらの表記でも構わず、同等と見做せる。

Eq. (8) を見ると補正項の分母はダクト開口半径 (16 mm) より大きな実効開口半径であり、仮に高次相対モーメントの絶対値が十分小さく、且つビーム位置が原点付近であれば補正項の絶対値は 1 よりも十分小さくなる。また、補正項を独立変数で偏微分した式の絶対値、例えば、

$$\left| \frac{\partial}{\partial P_1} \frac{2P_2}{R_{C1P2d}^2} \right| \quad (9)$$

なども高次相対モーメントの絶対値が十分小さく、且つビーム位置が原点付近であれば 1 よりも十分小さいであろう。

実際には高次相対モーメントは零では無いし、ビーム位置が原点から大きく離れた場合もあり、その場合は収束しない可能性もある。原点付近で収束し、原点から離れると収束しないと云うことは、収束する領域が必ずあり、それ探せば良いと云う事である。

しかしながら、この収束の領域は各次モーメントにより大きく変化するため、一般的な収束する領域の定式化は困難である。であるならば、ある興味のある領域 ROI を指定して、ROI 内で各次モーメントを持たせたシミュレーション計算を行い、その ROI が収束する領域内にあることを確かめれば良いのである。

3.3 再帰的計算の手法（多変数逐次近似）

5 変数の初期値を基本次のみ用いたモーメント計算式 Eq. (6) で得られた値とし、イタレーション 0 回目のを意味するサフックスを付けて $\{P_{1,0}, Q_{1,0}, P_{2,0}, Q_{2,0}, Q_{3,0}\}$ とする。

これらを $C_1^\dagger, S_1^\dagger, C_2^\dagger, S_2^\dagger, S_3^\dagger$ (Eqs. (7) 若しくは (8)) へ逐次代入 (Fig. 3 参照) し、最終的に 20 回目の値 $\{P_{1,20}, Q_{1,20}, P_{2,20}, Q_{2,20}, Q_{3,20}\}$ を近似解として得る。実際の計算では、五次までの計算の初期値は三次までの計算の結果を使用する。

3.4 鏡像法を用いたシミュレーション

六電極 BPM は完全な円形断面の金属では無いが、それに近いと仮定すると、点電荷をダクト内に、鏡像電荷をダクト外に置き、双方が作る電場を合成することによりダクト内表面に発生する電場を計算することができる (Fig. 4 参照) [8]。

二次相対モーメント及び三次相対モーメントの繰り込みは、電気四極子及び電気六極子を用いた。Figure 5 は三次相対モーメント P_{g3} を繰り込む為に置かれる電気六極子である。Figure 5 では例として原点に電荷量 λ の二次元点電荷が存在するとし、そこから 0.1 mm 離れた 6 箇所に電荷量 $\lambda P_{g3}/(6 \cdot 0.1^3)$ の二次元点電荷を置くことにより、三次相対モーメント P_{g3} が与えられるとしている。

同様な方法で二次相対モーメント P_{g2}, Q_{g2} 、三次相対モーメント Q_{g3} も与えることが可能である。

3.5 ROI の設定

SPRING-8 線型加速器に於いて、ビームは通常、原点より 5 mm 以内であり、ビームサイズも最大で 5 mm 程度と考えられるので、ROI を以下のように設定した。

$$\begin{aligned} b_G &= \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} \leq 5 \text{ [mm]}, \\ a_{g2}^2 &= \sqrt{P_{g2}^2 + Q_{g2}^2} \leq 25 \text{ [mm}^2\text{]}, \\ a_{g3}^3 &= \sqrt{P_{g3}^2 + Q_{g3}^2} \leq 50 \text{ [mm}^3\text{]}. \end{aligned} \quad (10)$$

三次モーメントに関してはビームがスリット等で削られて三角形になる場合を考慮して 50 mm³ 以内とした。四次以上の相対モーメントは考慮せず、零とした。

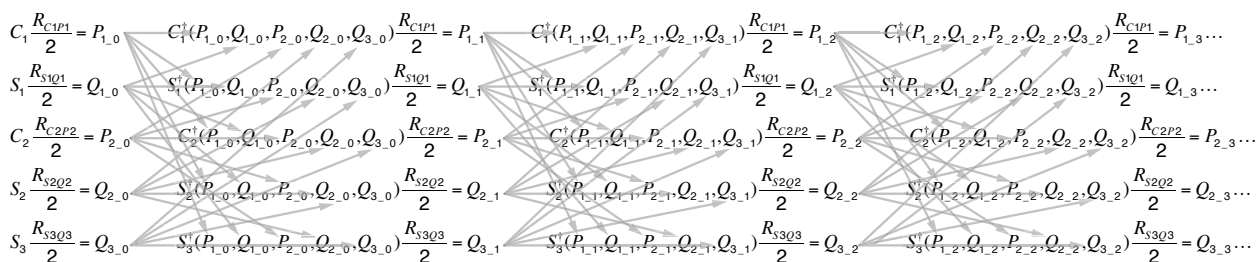


Figure 3: Algorithm of recursive calculation for obtaining five moments.

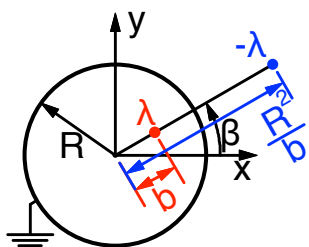


Figure 4: Configuration of charge and mirror charge in a metal duct with circular cross-section (two-dimensional).

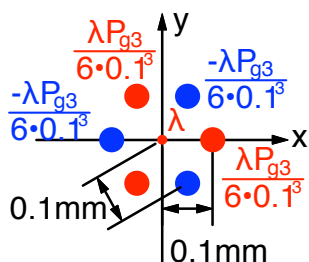


Figure 5: An electric sextupole represents a third-order relative moment P_{g3} . The figure shows the case of $P_1 = 0$, $Q_1 = 0$ and the two-dimensional point charge λ .

3.6 収束の例

実際に回帰的計算が収束していく様子を参考例として Fig. 6 に示す。Figure 6 はビームが持つモーメントとして、 $P_1 = Q_1 = -3$ [mm], $P_{g2} = Q_{g2} = -15$ [mm²] 及び $P_{g3} = Q_{g3} = -30$ [mm³] とした場合である。

イタレーション 0 回目は基本次のみ用いた計算式 Eq. (6) で得られたものである。この 0 回目を初期値とし、三次までの補正を行う計算式 Eq. (7) を使用して 20 回目まで計算を行う。最後に、20 回目を初期値とし、五次までの補正を行う計算式 Eq. (8) を使用して 40 回目まで計算を行うのである。得られた結果を 0 回目→20 回目→40 回目の順で書くと、以下の通りであった。

$$\begin{aligned} P_1 &: -3.13 \rightarrow -2.90 \rightarrow -3.01 \text{ [mm]}, \\ Q_1 &: -1.86 \rightarrow -3.04 \rightarrow -3.07 \text{ [mm]}, \\ P_{g2} &: -24.97 \rightarrow -18.47 \rightarrow -16.24 \text{ [mm}^2\text{]}, \\ Q_{g2} &: -11.62 \rightarrow -17.67 \rightarrow -13.84 \text{ [mm}^2\text{]}, \\ Q_{g3} &: -14.36 \rightarrow -88.10 \rightarrow -34.26 \text{ [mm}^3\text{]}. \end{aligned}$$

基本次のみ用いた計算では、各モーメント全般的に設定値からのズレが大きく、補正が必要であることがわかる。

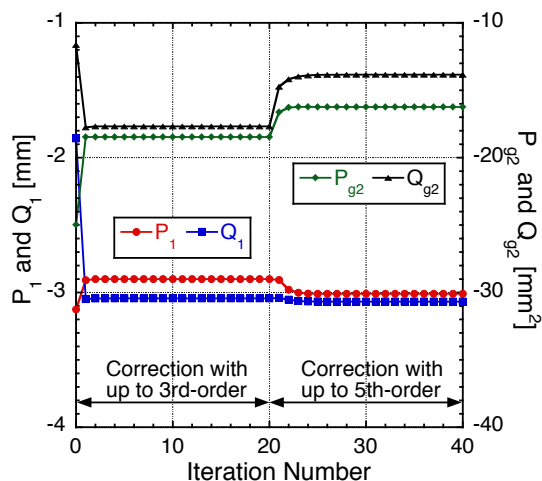


Figure 6: Recursive calculation process: an example, of P_1 , Q_1 , P_{g2} and Q_{g2} . Set moments are $P_1 = Q_1 = -3$ [mm], $P_{g2} = Q_{g2} = -15$ [mm²] and $P_{g3} = Q_{g3} = -30$ [mm³].

三次までの補正を行う計算では、1 回のイタレーションでほぼ収束値となる。すなわち、三次までの場合は 1 回の補正でほぼ十分であり、複数回のイタレーションはほぼ必要無い。また、三次相対モーメント Q_{g3} では計算値の設定値から誤差が大きい。

五次までの補正を行う計算では、5 回ほどのイタレーションでほぼ収束する。

3.7 計算誤差

鏡像法を用いた電場計算には誤差が存在しない為、再帰的計算の計算値から設定値を差し引いた差分はそのまま計算誤差と考えると良い。本項では、実際に ROI を設定した場合、どの程度の計算誤差が発生するかを考える。

今回、Eq. (10) を ROI とし、試行点の間隔は P_1 及び Q_1 は 1 mm、 P_{g2} 及び Q_{g2} は 5 mm²、 P_{g3} 及び Q_{g3} は 10 mm³ とした。従って総試行点数は 531,441 点となった。

Figure 7 は Q_1 の設定値と計算値の相関図である。図を見ると判るが、基本次のみ用いた計算では相関が悪く、例えば $Q_1 = 0$ とセットされたとしても、 ± 3 mm と計算される場合もあることを示している。

計算値の設定値からの差分 (計算誤差) を Δ を付けて表し、 ΔP_1 等とする。それらを度数分布で表したのが、Fig. 8 及び 9 である。明らかに五次モーメン

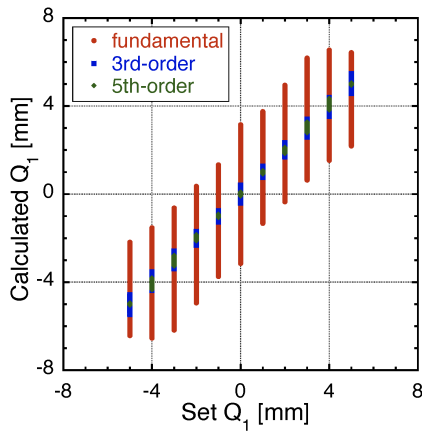


Figure 7: Correlation plot of set Q_1 and calculated Q_1 .

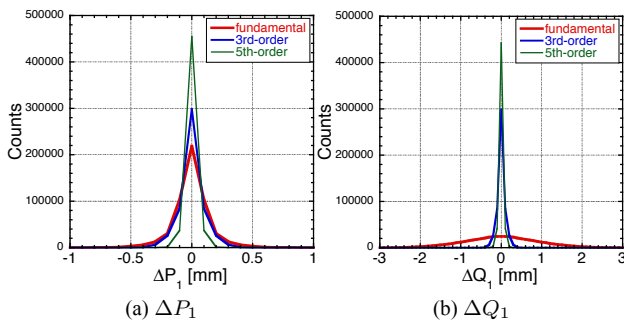


Figure 8: Frequency distribution of ΔP_1 and ΔQ_1 which are differences of calculated P_1 , Q_1 and set P_1 , Q_1 in the region defined by Eq. (10).

トまでの補正の方が計算誤差が小さい。

ΔP_1 , ΔQ_1 , ΔP_{g2} , ΔQ_{g2} 及び ΔQ_{g3} の標準偏差は Table 2 の通りであった。Table 2 も、基本次より三次までの補正の方が、三次までより五次までの補正の方がより正確なモーメントを計算出来ると云う事を示している。

二次相対モーメントは概ねビームサイズの二乗程度である。ツイスパラメータ測定等に於けるビームサイズを最大 3 mm 程度と想定すると、二次相対モー

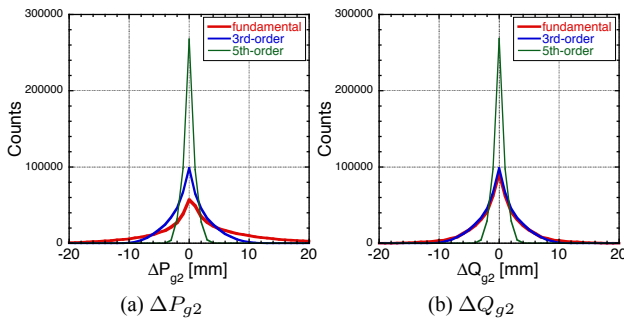


Figure 9: Frequency distribution of ΔP_{g2} and ΔQ_{g2} which are differences of calculated P_{g2} , Q_{g2} and set P_{g2} , Q_{g2} in the region defined by Eq. (10).

Table 4: Standard Deviations of Frequency Distributions

	ΔP_1 [mm]	ΔQ_1 [mm]	ΔP_{g2} [mm ²]	ΔQ_{g2} [mm ²]	ΔQ_{g3} [mm ³]
fundamental	0.15	0.91	8.28	4.25	91.14
3rd-order	0.09	0.10	3.28	3.25	49.82
5th-order	0.04	0.04	0.95	0.95	2.25

メントは最大 9 mm² なので、その 10% 程度の計算誤差 (0.9 mm²) に抑えるためには、五次モーメントまでの補正が必要なのことがわかる。

4. 今後の課題

今回、ビーム位置や高次相対モーメント算出に、五次モーメントまでの補正が有効であることが判った。また、五次モーメントまでの補正を行うに当たり、再帰的計算手法のアルゴリズムが適用できることが判った。今後は、このアルゴリズムを制御 (データ収集) システムへ組み込み、実機への運用を行う予定である。

実機での運用では、例えば信号処理回路に突然故障が発生する事態も起こり得る。その時、 $|P_{g3}|$ が大きな値を示したり、各モーメント計算が収束しなかったりすると思われる。故障時の対処等も含め、実機への運用は今後の課題であろう。

参考文献

- [1] K. Yanagida *et al.*, “Development of Six-Electrode BPM System in SPring-8 Linac”, Proc. of the 9th Annual Meeting of Particle Accel. Soc. of Japan, Osaka, Aug. 2012, pp. 304-308; http://www.pasj.jp/web_publish/pasj9/proceedings/PDF/FRLR/FRLR10.pdf
- [2] K. Yanagida *et al.*, “Measurement and Matching of Twiss Parameter for SPring-8 Linac Using Six-Electrode BPMs”, Proc. of the 11th Annual Meeting of Particle Accel. Soc. of Japan, Aomori, Aug. 2014, pp. 62-66; http://www.pasj.jp/web_publish/pasj2014/proceedings/PDF/SAOM/SAOM04.pdf
- [3] K. Yanagida *et al.*, Phys. Rev. ST Accel. Beams **15**, 012801 (2012); <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevSTAB.15.012801>
- [4] J. A. T. Kamga *et al.*, Phys. Rev. Accel. Beams **19**, 042801 (2016); <http://journals.aps.org/prab/pdf/10.1103/PhysRevAccelBeams.19.042801>
- [5] K. Satoh and M. Tejima, “Recalibration of Position Monitors with Beams”, Proc. of the 18th Particle Accel. Conf., Dallas, May 1995, pp. 2482-2484; <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/p95/ARTICLES/MPQ/MPQ14.PDF>
- [6] K. Satoh and M. Tejima, “Calibration of KEKB Beam Position Monitors”, Proc. of the 19th Particle Accel. Conf., Vancouver, May 1997, pp. 2087-2089; <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/pac97/papers/pdf/9P076.PDF>
- [7] K. Yanagida *et al.*, “Third-Order Moment Effect of Beam Position Measurements”, Proc. of the 10th Annual Meeting of Particle Accel. Soc. of Japan, Nagoya, Aug. 2013, pp. 197-201; http://www.pasj.jp/web_publish/pasj10/proceedings/PDF/MOOS/MOOS03.pdf
- [8] 後藤憲一他, 詳解電磁気学演習 (共立出版, 東京, 1970) 初版, p. 100.