

# 自己場支配領域におけるバンチドビーム輸送のエミッタンス増大計算 EMITTANCE GROWTH CALCULATIONS FOR BUNCHED BEAM TRANSPORT IN SELF-INDUCED ELECTROMAGNETIC FIELDS DOMINATED REGION

地村幹\*

Motoki Chimura\*

Japan Atomic Energy Agency

## Abstract

When the Hamiltonian cannot be expressed in terms of only linear terms due to a significant self-field, the perturbation terms can cause fluctuations in the distribution of the action variables, leading to emittance growth. In order to evaluate the emittance growth in a region where the self-field is dominant, such as the upstream of a high-intensity ion linear accelerator, a theoretical expression for the emittance variation due to the self-field is derived. By comparing the results of the calculation with those of an existing particle-in-cell code, a similar trend in the emittance variation was confirmed. Therefore, this theoretical expression can be used to understand the results of multi-particle calculations. This result provides a basis for suppressing emittance growth and is expected to improve beam intensity and stability.

## 1. はじめに

ビーム構成粒子が受けるポテンシャルが線形項のみで表すことができない場合、その摂動項によってエミッタンスの変動が引き起こされる [1]。特に大強度イオン線形加速器の最上流部のようにビームが高密度かつ低速の場合には、ビームが単位距離を進む間に自己場から大きな力積を受け取るため、急速にエミッタンスが変動する。大強度イオン加速器におけるエミッタンスの増大はビーム透過率の悪化及び機器の高放射化の原因となり、大強度かつ高安定な加速器運転が阻害される。このようなエミッタンス増大は自己場の影響が特に強い位置に局在化するため、局所的に非線形場を発生させることで自己場を補償し、エミッタンス増大を抑制する方法が提案されている [2]。自己場補償を実現するために非線形場を発生させる電磁石が新たに開発されており [3]、テスト用ビームラインに導入することでエミッタンス増大が抑制されることが実験的に確かめられている [4]。

非線形場による自己場補償を実加速器に適用するためには、非線形補償場の数、位置、および強度を加速器全体を考慮して最適化しなければならないが、現在ではそれらは多粒子計算による総当たりによって決定されている。また、線形収束場を変更すると自己場も変動するため、今後さらに高度にエミッタンス増大を抑制するためには、線形収束場と非線形補償場は統一的に最適化されなければならない。以上より、本研究は非線形ビーム力学の観点から線形収束場と非線形補償場を統合した最適化法を導くことを目的に進められているものである。

本論文では、自己場の影響の下で輸送されるビーム構成粒子の運動方程式を導出し、そこからエミッタンス変動を計算することで理論的な基礎を確立する。また、既存 Particle in Cell コードの計算結果と比較することで理論の正当性を保証し、シミュレーション結果に解釈を与える。

## 2. 摂動項による作用変数の変化

### 2.1 ビーム構成粒子のハミルトニアン

自己場の影響の下で輸送されるビーム構成粒子の運動方程式を導出するため、一般的なビーム構成粒子のハミルトニアンを導く。本論文では、ビーム軌道上の位置を  $s$ 、ビーム軌道に直行する平面における水平方向を  $n$ 、鉛直方向を  $b$ 、時間を  $t$  で表す。全方向を等価に扱うために、ビームの基準粒子の速さと光速との比  $\beta_0$ 、ローレンツ因子  $\gamma_0$ 、光速  $c$ 、及び基準粒子が  $s$  に達した時間  $t_0$  を用いて、時間方向の座標として

$$\tau = -\beta_0\gamma_0c(t - t_0) \quad (1)$$

を用いる。このときのハミルトニアンが、運動量  $p$ 、各座標  $\chi (= n, b, \tau)$ 、基準粒子の運動量  $p_0$ 、及び線形場の強度  $k_\chi$  を用いて

$$H_1(n, p_n, b, p_b, \tau, p_\tau; s) = \sum_x \left( \frac{p_x^2}{2p_0} + \frac{1}{2}p_0k_x\chi^2 \right) + h \quad (2)$$

と記述されると仮定する [5]。ここで、 $h$  はポテンシャルの非線形項に起源を持つ摂動項であり、粒子の持つ電荷  $q$  及びポテンシャル  $A$  を用いて、

$$h = q(\gamma_0A_\tau + A_s)_{\text{nonlinear}} \quad (3)$$

と記述される。

正準変数を位置と運動量から角変数  $\psi$  と作用変数  $J$  に変換することで、ハミルトニアンは

$$H_2(\psi_n, J_n, \psi_b, J_b, \psi_\tau, J_\tau; s) = \sum_x \frac{J_x}{\beta_x} + h \quad (4)$$

と表すことができる。ここで、 $\beta$  はベータトロン関数であ

\* chimura@post.j-parc.jp

り、角変数・作用変数は位置・運動量と

$$\begin{aligned} \chi &= \sqrt{\frac{2J_\chi \beta_\chi}{p_0}} \cos \psi_\chi \\ p_\chi &= -\sqrt{\frac{2J_\chi p_0}{\beta_\chi}} \left( \sin \psi_\chi - \frac{1}{2} \frac{d\beta_\chi}{ds} \cos \psi_\chi \right) \end{aligned} \quad (5)$$

の関係がある。式 (5) から分かるように、作用変数  $J$  が大きいほど位相空間において大きな振幅で運動を行う。ゆえに、作用変数の平均は位相空間におけるビーム分布自体の広がりを表し、エミッタンスと一致する。式 (4) を正準方程式に適用することにより、角変数と作用変数の変化は

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_\chi}{ds} &= \frac{1}{\beta_\chi} + \frac{\partial h}{\partial J_\chi} \\ \frac{dJ_\chi}{ds} &= -\frac{\partial h}{\partial \psi_\chi} \end{aligned} \quad (6)$$

となることから、摂動項  $h$  を含まない場合には作用変数  $J$  は変動しない。以上から、摂動項が有意に働く場合にはそれに起因したエミッタンスの変動が引き起こされることが予期される。

## 2.2 ビームシミュレーションによるビーム分布の変化

ポテンシャルの非線形項に起源を持つ摂動項  $h$  が有意に働く場合のビームシミュレーションを、Particle in Cell コード *IMPACT-Z* [6] を用いて実行した。計算モデルとして、J-PARC リニアックの 3 MeV ビーム輸送ラインの前半部と同等の構造を持つ約 1.5 m の長さを持つテスト用ビームラインである RFQ テストスタンド (RFQ-TS) [7] を想定した。RFQ-TS では、設置されている 3 台の四極電磁石を用いてビーム軌道に垂直な方向の収束場を発生させ、時間方向の収束は行わない。また、ビーム条件は Table 1 に示すとおり、RFQ-TS と同等になるように設定した。

Table 1: Main Parameters of Particle-Tracking Simulations

Particle	Negative Hydrogen Ion
Kinetic Energy	3 MeV
Total Charge	$-10^9 e$
Emittance	0.2 mm MeV/c
Beam Distribution	Gaussian

計算された RFQ-TS におけるビーム幅とエミッタンスの変化を Fig. 1 に示す。四極電磁石によってビームがある程度の幅を保ちながら輸送されていることが確認できる。また、エミッタンスは 1.5 m で 10% 程度増大する。ビーム幅が広い場合にはビーム密度が低下することが予想される一方、水平方向のビーム幅が広い地点では水平方向のエミッタンスが増大し、鉛直方向のビーム幅が広い地点では鉛直方向のエミッタンス増大が引き起こされる様子が確認される。

RFQ-TS シミュレーションによる角変数と作用変数の張る位相空間の粒子分布を Fig. 2 に示す。初期状態と比較して、終状態では作用変数が増大している粒子が存在することが確認され、これがエミッタンス増大の原因である。

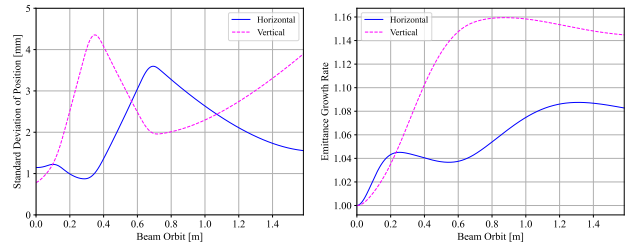


Figure 1: Variation of horizontal (blue, solid) and vertical (magenta, dashed) beam width (left) and emittance-growth ratio (right) obtained from the RFQ-TS beam simulation.

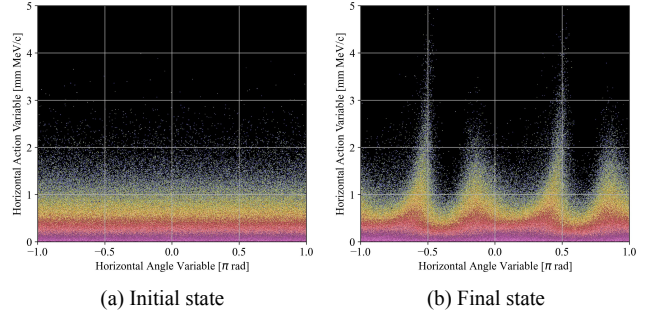


Figure 2: Horizontal phase-space distribution obtained from the RFQ-TS beam simulation. Differences in color represent differences in density.

Equation (6) より、非線形項による摂動項  $h$  によって作用変数の変動が起きることから、本シミュレーションにおいても非線形項が有意に働いていることが伺える。ここで、作用変数の増大を起こしている粒子は特定の角変数をもっている粒子に限ることが特徴的として挙げられる。

## 3. 球対称ビームの分布変化

### 3.1 ビーム自己場

前節より、自己場が有意に働く場合には自己場の非線形摂動項によってエミッタンスの増大が引き起こされることが示された。このエミッタンス増大の特徴として、ビーム幅の広い領域において特定の角変数を持つ粒子の作用変数が増大することがシミュレーションによって示された。そこで、以下では自己場による非線形摂動項を導出することによって、上記の特徴を満たす運動方程式を導く。

重心系においてビーム自身が誘導するポテンシャル  $\tilde{\Phi}$  は、位置  $\hat{\mathbf{r}}$  における密度分布  $\rho$  が位置  $\mathbf{r}$  に作るポテンシャルの総和であるから、

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d\hat{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}|} \rho(\hat{\mathbf{r}}) \quad (7)$$

である。ここで、 $Q$  はビームパンチの総電荷、 $\epsilon_0$  は電気定数である。ここに、位置の標準偏差  $\sigma$  を用いてビーム密度分布が

$$R^2 = \frac{n^2}{\sigma_n^2} + \frac{b^2}{\sigma_b^2} + \frac{\tau^2}{\sigma_\tau^2} \quad (8)$$

にのみ依存する、すなわち楕円体対称性を持つと仮定する

と、ポテンシャルは、

$$\tilde{\Phi} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \pi \int_0^\infty du \frac{1}{\sqrt{(\sigma_n^2 + u)(\sigma_b^2 + u)(\sigma_\tau^2 + u)}} \times \int_{R_u^2} dR^2 \hat{\rho} \quad (9)$$

と表すことができる [8]。ここで、 $u$  は積分のための補助変数、計算  $R_u$  は

$$R_u^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n^2}{\sigma_n^2 + u} + \frac{b^2}{\sigma_b^2 + u} + \frac{\tau^2}{\sigma_\tau^2 + u} \quad (10)$$

によって定義された変数、 $\hat{\rho}$  は無次元化されたビーム密度関数であり、

$$\hat{\rho} = \sigma_n \sigma_b \sigma_\tau \rho \quad (11)$$

によって定義されたものである。

### 3.2 球対称ビーム自己場による運動方程式

前節で求めた自己場を用いて、ハミルトニアンの非線形摂動項を導く。重心系では  $s$  方向のベクトルポテンシャル  $\tilde{A}_s$  が 0 であると仮定し、ローレンツ変換を用いて実験室系のポテンシャルを求め、Eq. (3) に代入することで、非線形摂動項  $h$  はポテンシャルと

$$h = \frac{qm}{p_0} \left( \tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}_L \right) \quad (12)$$

の関係で結ばれる。ここで、 $\tilde{\Phi}_L$  はポテンシャルの線形項である。

粒子分布が Gauss 分布に従い、かつ球対称性を持つ、すなわちビーム幅の幾何平均  $\bar{\sigma}$  を用いて、

$$\sigma_\chi \rightarrow \bar{\sigma} = (\sigma_n \sigma_b \sigma_\tau)^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

の変換を行う。このとき、Eq. (9) は

$$\tilde{\Phi}^{\text{sph}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}\bar{\sigma}} \Lambda^{-1} \text{erf}(\Lambda) \quad (14)$$

と記述される。ここで、 $\Lambda$  は

$$\Lambda^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\chi \frac{J_\chi}{\langle J_\chi \rangle} \cos^2 \psi_\chi \quad (15)$$

によって定義される変数である。Equation (14) を級数展開することで線形項が

$$\tilde{\Phi}_L^{\text{sph}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}\bar{\sigma}} \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \Lambda^2 \quad (16)$$

と導かれる。Equations (14) 及び (16) より、非線形摂動項は

$$h = \frac{qmQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}p_0\bar{\sigma}} \left[ \Lambda^{-1} \text{erf}(\Lambda) + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \Lambda^2 \right] \quad (17)$$

と求められる。この非線形摂動項を運動方程式に代入することで、自己場の下における運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_\chi}{ds} &= \frac{1}{\beta_\chi} + \frac{qmQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}p_0\bar{\sigma}} \frac{\cos^2 \psi_\chi}{\langle J_\chi \rangle} \\ &\times \left[ \frac{2}{3} + \Lambda^{-2} \exp(-\Lambda^2) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Lambda^{-3} \text{erf}(\Lambda) \right] \\ \frac{dJ_\chi}{ds} &= \frac{qmQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}p_0\bar{\sigma}} \frac{2J_\chi \cos \psi_\chi \sin \psi_\chi}{\langle J_\chi \rangle} \\ &\times \left[ \frac{2}{3} + \Lambda^{-2} \exp(-\Lambda^2) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Lambda^{-3} \text{erf}(\Lambda) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

が得られる。

Equation (18) で得られた角変数と作用変数の変化率を Fig. 3 に示す。Figure 3 より、角変数と作用変数の変化率は粒子の持つ角変数によって増減することが分かる。特に、角変数変化率は 0 rad 及び  $\pi$  rad において大きく増加し、作用変数変化率は  $\pi/4$  rad 及び  $-3\pi/4$  rad において大きく増加する。 $\pm\pi/2$  rad における角変数変化率の最小値は、Eq. (18) における角変数変化率の第 1 項  $\beta_\chi^{-1}$  と等しい。一方、作用変数は変化率の大きさを決定し、作用変数が多いほどその変化は大きい。

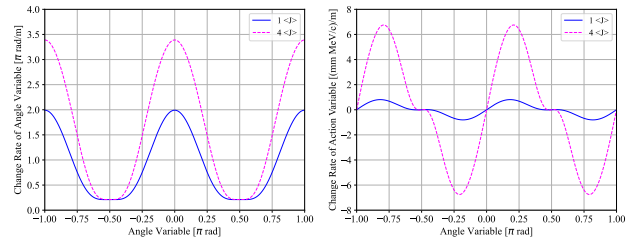


Figure 3: Angle variable dependence of the change rate of angle variable (left) and action variable (right) due to self-induced fields. The solid blue lines represent the case where the action variable has a mean value, and the dashed magenta lines represent the case where the action variable has four times the mean value.

### 3.3 球対称ビームの作用変数変化計算

Equation (18) で得られた運動方程式を用いて、粒子の角変数と作用変数の変化を追跡した。ここで、RFQ-TS シミュレーションと同様に、ビーム条件は Table 1 に示したものをを用いた。ビーム幅は全方向に等しく、かつ一定として計算し、粒子の初期条件として作用変数は平均値の 9 倍、角変数は等確率で分布するものとした。また、計算を行わない 2 方向の位置は常に平均値と等しいものと仮定した。

角変数と作用変数の変化の計算結果を Fig. 4 に示す。計算が進むにつれて特定の角変数を持つ粒子の作用変数が増大しており、Particle in Cell シミュレーションの結果である Fig. 2b と同様の傾向を示した。本計算では、2 mm と 4 mm の 2 種類の異なるビーム幅の計算を行なった。Figure 4 から、ビーム幅が 4 mm の場合は角変数の変化が少なく、作用変数が増大している粒子が長距離に渡って同じ角変数に留まることが確認される。そのため、ビーム幅が 2 mm の場合と比べて長距離の間作用変数が増大し続ける。これは、Eq. (18) の角変数変化率における  $\beta_\chi^{-1}$  の項の効果である。

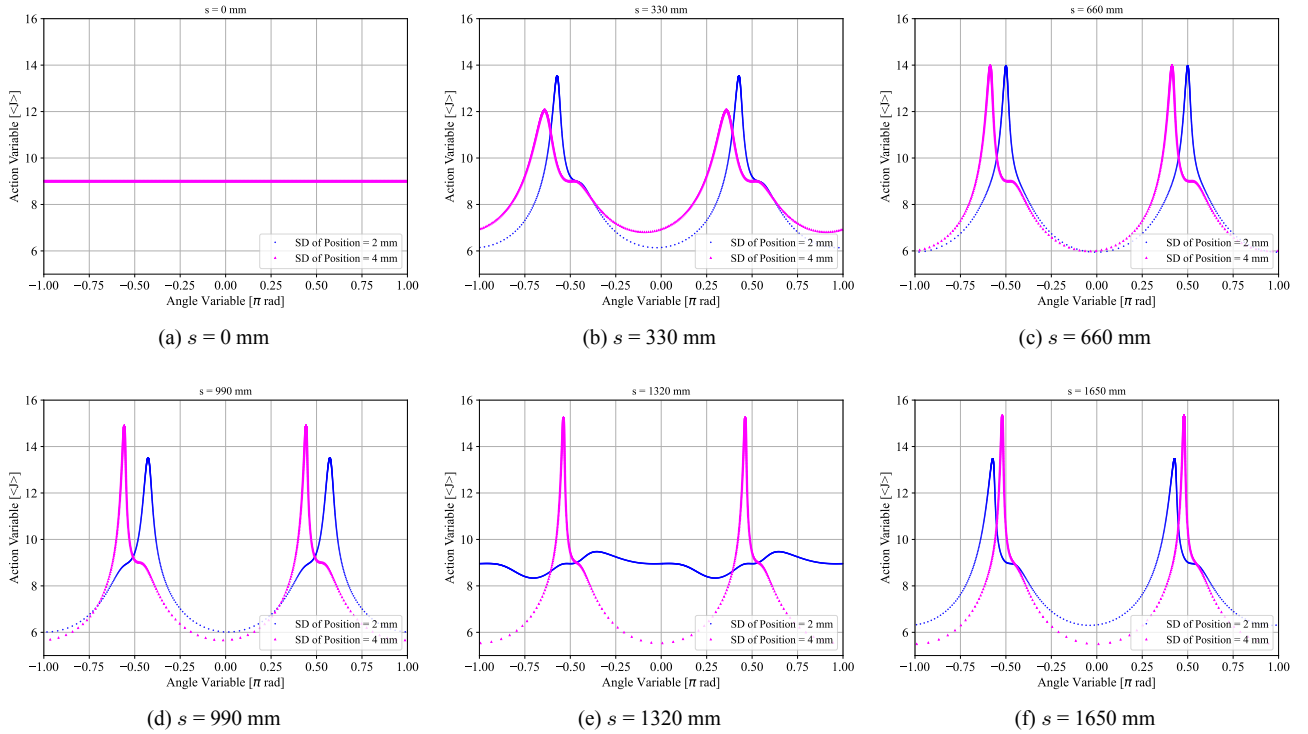


Figure 4: Changes in the action variables obtained from the calculation. Blue points represent the case with a beam width of 2 mm, and magenta points represent the case with a beam width of 4 mm.

計算された作用変数の平均を Fig. 5 に示す。ビーム幅が 2 mm の場合には角変数変化率が大きいため、作用変数平均の増減が素早く引き起こされる。一方、ビーム幅が 4 mm の場合は角変数変化率が小さいために長距離に渡って作用変数が増大し、作用変数平均の増大率はほとんどの位置においてがビーム幅が 4 mm の方が大きい。以上から、本計算は、ビーム幅の広い領域において特定の角変数を持つ粒子の作用変数が増大するという、Particle in Cell シミュレーションにおけるエミッタンス増大の特徴を再現するものである。

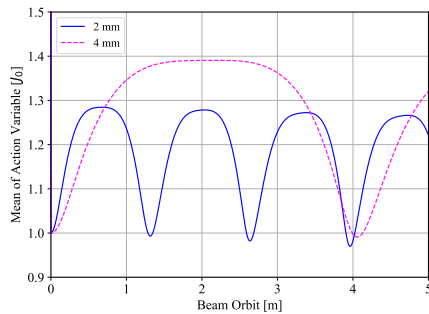


Figure 5: Variation of the mean of the action variable for different beam widths. The solid blue line represents the case with a beam width of 2 mm, and the dashed magenta line represents the case with a beam width of 4 mm.

## 4. 楕円体対称ビームの分布変化

### 4.1 形状係数

前節までの計算は、ビーム分布が球対称性を満たすと仮定したものであった。以下では、楕円体対称性分布にも本理論を適用可能にするため、形状による補正係数を導出する。形状係数  $\eta$  は、球対称分布によるポテンシャルの線形項  $\tilde{\Phi}_{L,\chi}^{\text{sph}}$  と楕円体対称分布によるポテンシャルの線形項  $\tilde{\Phi}_{L,\chi}$  の比として、

$$\eta_{\chi} = \frac{\tilde{\Phi}_{L,\chi}}{\tilde{\Phi}_{L,\chi}^{\text{sph}}} \quad (19)$$

と定義する。ポテンシャルの線形項は Eq. (9) を級数展開することによって、

$$\tilde{\Phi}_{L,\chi} = a_R \int_0^{\infty} du \frac{1}{\sqrt{(\sigma_n^2 + u)(\sigma_b^2 + u)(\sigma_{\tau}^2 + u)}} \frac{1}{\sigma_{\chi}^2 + u} \quad (20)$$

と求められる。ここで、 $a_R$  は比例係数である。Equation (20) の各方向のビーム幅がそれらの幾何平均と等しい場合、ポテンシャルは

$$\tilde{\Phi}_{L,\chi}^{\text{sph}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sigma_n \sigma_b \sigma_{\tau}} a_R \quad (21)$$

となる。以上から、形状係数  $\eta$  は、

$$\eta_n = \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma_n^2}{\sigma_b \sigma_\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty d\hat{u}_n \left( \frac{\sigma_n^2}{\sigma_b \sigma_\tau} + \hat{u}_n \right)^{-\frac{3}{2}} \times \left( \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b \sigma_\tau} + \hat{u}_n \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_b \sigma_\tau} + \hat{u}_n \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (22)$$

である。ここで、 $\hat{u}_n$  は

$$\hat{u}_n = \frac{u}{\sigma_b \sigma_\tau} \quad (23)$$

と定義した無次元の変数である。

形状係数には積分が含まれているため、ビーム幅が変動する度に積数値分を実行しなければならない。そこで、 $n$  方向に着目する場合には、

$$\begin{aligned} \sigma_b &\rightarrow \sqrt{\sigma_b \sigma_\tau} \\ \sigma_\tau &\rightarrow \sqrt{\sigma_b \sigma_\tau} \end{aligned} \quad (24)$$

といった変換を施すことで、その他の方向のビーム幅の幾何平均を取る。この変換を行うことによって積分を実行することができ、形状係数は、

$$\eta_n = \begin{cases} \frac{3}{1 - \hat{\sigma}_n^2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{1 - \hat{\sigma}_n^2}} \arccos(\hat{\sigma}_n) \right] & (\text{for } \hat{\sigma}_n \leq 1) \\ \frac{3}{\hat{\sigma}_n^2 - 1} \left[ \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\hat{\sigma}_n^2 - 1}} \operatorname{arccosh}(\hat{\sigma}_n) - 1 \right] & (\text{for } \hat{\sigma}_n > 1) \end{cases} \quad (25)$$

と記述される。ここで、 $\hat{\sigma}_n$  は他方とのビーム幅の比であり、

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma_b \sigma_\tau}} \quad (26)$$

によって定義した。

#### 4.2 楕円体対称ビームの作用変数変化計算

Equation (18) で得られた運動方程式に形状係数 Eq. (25) をかけることによって補正を行なった場合の計算を Fig. 6 に示す。Figure 6 では2つの場合の計算が示されており、両方ともビーム幅の幾何平均は 4 mm で一致しているが、一方はビーム幅が 6 mm となっており、ビーム幅に偏りがある楕円体の計算結果を示している。ビーム幅が 4 mm の場合はビーム密度が高いために作用変数平均の変化率は大きい、角変数変化率の差によって、ビーム幅が 6 mm の方がエミッタンスの最大値は大きい。よって、本計算結果は、幾何平均ビーム幅が一致する場合ではビーム幅が大きい方がエミッタンスの増大率が大きいことを示しており、Fig. 1 のシミュレーション結果と一致するものである。

### 5. まとめ

非線形補償場を用いた自己場支配領域におけるエミッタンス増大を抑制を実現するため、理論的基礎として、自己場の影響の下で輸送されるビーム構成粒子の運動方程式を

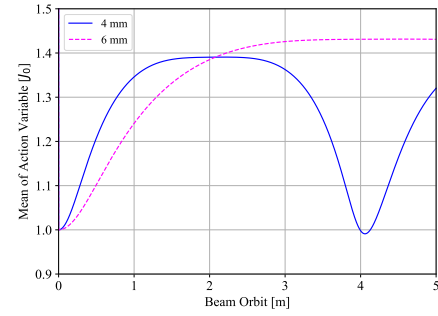


Figure 6: Variation of the mean of the action variable with beam shape. The solid blue line represents a spherically symmetric distribution with a beam width of 4 mm; the dashed magenta line represents an ellipsoid-symmetric distribution with a beam width of 6 mm and other beam widths of  $8\sqrt{3}/3$  mm. In both cases, the geometric mean of the beam widths in the three directions is 4 mm.

導出した。運動方程式を用いたエミッタンス変動の計算が実施され、ビーム幅の広い領域において特定の角変数を持つ粒子の作用変数が増大するという自己場支配領域におけるエミッタンス増大の特徴を示した。さらに、既存 Particle in Cell コードの計算結果と比較することで本理論の正当性を示し、シミュレーション結果に解釈を与えた。また、ビームが球対称性を満たさない場合についてもその補正項を導入することで計算を行うことが可能であることを示した。以上の成果から、自己場支配領域における高品質なビーム輸送の実現に寄与し、加速器の大強度化と高安定化が促進されることで稀な事象の探索や精密測定など利用可能性が拡大することを期待する。

### 謝辞

本研究におけるご助言とご協力を賜りました日本原子力研究開発機構の金正倫計氏と原田寛之氏に感謝申し上げます。

本研究は JSPS 科研費 JP23K19054 の助成を受けたものです。

### 参考文献

- [1] S. M. Lund, T. Kikuchi, and R. C. Davidson, "Generation of Initial Kinetic Distributions for Simulation of Long-Pulse Charged Particle Beams with High Space-Charge Intensity", *Physical Review Accelerators and Beams* **12**, 114801 (2009). <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.12.114801>
- [2] M. Chimura, H. Harada, and M. Kinsho, "Beam Emittance Growth due to Strong Space-Charge Field at Low-Energy of a High-Intensity Ion Linac and Its Mitigation by Using Octupole Magnetic Field", *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2022**, 063G01 (2022). <https://doi.org/10.1093/ptep/ptac077>
- [3] M. Chimura, H. Harada, T. Takayanagi, K. Ogata, Y. Kumagai, K. Honnami, Japanese Unexamined Patent Application Publication, 2024-22311. <https://www.j-platpat.inpit.go.jp/c1801/PU/JP-2022-125801/10/ja>
- [4] M. Chimura, "Emittance Growth Due to the Strong Space-

- Charge Field and Its Mitigation Using a Combined Multipole Magnet*", Doctoral thesis (2023).  
<http://hdl.handle.net/10097/00137437>
- [5] E. D. Courant and H. S. Snyder, "Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron", *Annals of Physics* **3**, 1 (1958).  
[https://doi.org/10.1016/0003-4916\(58\)90012-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(58)90012-5)
- [6] J. Qiang, R. D. Ryne, S. Habib, and V. Decyk, "An Object-Oriented Parallel Particle-in-Cell Code for Beam Dynamics Simulation in Linear Accelerators", *Journal of Computational Physics* **163**, 434 (2000).  
<https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6570>
- [7] High-intensity Proton Accelerator Project Team, "Accelerator Technical Design Report for High-intensity Proton Accelerator Facility Project, J-PARC", JAERI-Tech 2003-044 and KEK Report 2002-13 (2003).
- [8] F. J. Sacherer, "RMS Envelope Equations with Space Charge", *IEEE Transactions on Nuclear Science* **18**, 1105-1107 (1971).  
<https://doi.org/10.1109/TNS.1971.4326293>