

# 非常に小さいモーメントムコンパクション因子を持つ蓄積リングにおける 横方向ビーム不安定性の解析的研究

## ANALYTICAL STUDY OF TRANSVERSE BEAM INSTABILITIES IN A STORAGE RING WITH A VERY LOW MOMENTUM COMPACTION FACTOR

中村典雄<sup>#, A)</sup>

Norio Nakamura<sup>#, A)</sup>

<sup>A)</sup> High Energy Accelerator Research Organization

### Abstract

I analytically study transverse beam instabilities in the PF-HLS ring with a very low momentum compaction factor of  $3.24 \times 10^{-5}$ . A broad-band resonator model with the resonant frequency of 30 GHz and shunt impedance of 1 M $\Omega$  for the quality factor of 1 is used as the vertical impedance of the storage ring. Calculations by MOSES have shown that the threshold bunch current for the transverse mode-coupling instability of the PF-HLS ring is  $\sim 0.073$  mA and much lower than that of the NSLS-II ring, mainly because of the lower synchrotron tune and the shorter bunch length. However, the growth rates of the head-tail instability modes are rapidly reduced as the vertical chromaticity  $\xi_y$  increases from 0 and the maximum growth rate becomes below the radiation damping rate at  $\xi_y = 6$  for  $0 \leq I_b \leq 12$  mA, because the bunch frequency spectrum drastically changes due to the very low momentum compaction factor. It is also shown that increase of the bunch length significantly reduces the chromaticity required for stabilizing the head-tail oscillations.

### 1. はじめに

KEK では次期光源として PF-HLS 光源 (HLS: Hybrid Light Source)[1,2]を設計検討している。PF-HLS では、蓄積リング内を周回している電子ビームからの放射光及び超伝導リアックから入射される極短電子バンチを持つビームからの放射光という複数の放射光ビームの同時利用を行うことを計画している。そのために、PF-HLS リングは入射される極短バンチが通過するリング内でバンチ長を極力維持できるように非常に小さいモーメントムコンパクション因子を持っている。このような小さいモーメントムコンパクション因子を持つ蓄積リングでは通常のリングと比べて横方向ビーム不安定性の電流閾値は低くなる傾向にある。加えて、PF-HLS リングでは単純な多バンチ運転だけでなく、大電流孤立バンチと多バンチとを組み合わせるハイブリッド運転も求められている。本発表では、PF-HLS リングでの横方向ビーム不安定性について解析的な方法を使って研究した結果について報告する。クロマティシティやバンチ長などの影響とそれらによる横方向ビーム不安定性の抑制効果についても述べる。

### 2. PF-HLS リングとインピーダンスモデル

#### 2.1 PF-HLS リング

次期放射光源として設計検討されている PF-HLS リングのパラメータを Table 1 に、そのラティス構造を Fig. 1 に示す。PF-HLS リングでは、エネルギーを 2.5 GeV と 5 GeV で切り替え可能とし、2.5 GeV ではリングに蓄積されている電子バンチ (SR ビームと呼ぶ)からの放射光だけでなく、超伝導リアックからの電子バンチ (SP ビームと呼ぶ)が発生する極短放射光パルスの同時利用を行うことが検討されている。また、蓄積ビームでは単純なマル

チバンチ (MB) モードだけでなく、孤立バンチとマルチバンチを同時利用するハイブリッド (HB) モードでの運転も要求されている。リングの周回周波数  $f_0$  は 400 kHz で、バケット数は最大で 1250 になる。目標とする蓄積電流 500 mA では 1250 バンチに均等に蓄積するとしてバンチ電流は 0.4 mA (バンチ電荷 1 nC 相当) になる。HB モードでは最大で 12 mA (30 nC) の孤立バンチの実現を目標とする。

Table 1: Parameters of PF-HLS Ring

Parameter	Value	
Energy [GeV]	2.5	5
Circumference [m]	749.5	
Lattice	Double DDBA/ 8BA(modified)	
RF voltage [MV]	1.6	6.5
RF bucket height [%]	8.93	7.76
Momentum compaction factor	$3.24 \times 10^{-5}$	
Betatron tune $\nu_x/\nu_y$	47.865/16.655	
Radiation dumping time x/y/z [ms]	25.9/56.2/ 67.5	3.24/7.03/ 8.44
Beam current [mA]	500	200
Natural emittance [nm rad]	0.208	0.832
Energy spread	$7.417 \times 10^{-4}$	$1.48 \times 10^{-3}$
Natural bunch length [ps]	4.72	7.21

<sup>#</sup> norio.nakamura@kek.jp

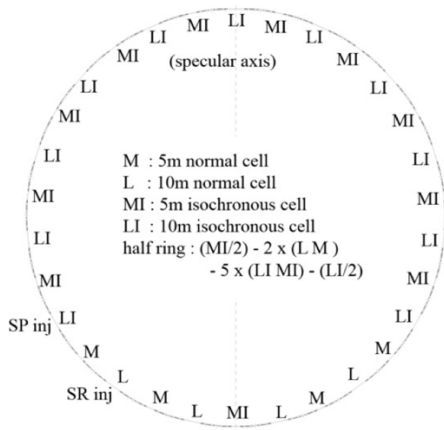


Figure 1: Lattice structure of the PF-HLS ring

既に述べたように、超伝導リアックから入射される極短バンチからの放射光パルスを利用するために、極短バンチが通過するリングのセルはバンチ長が極力伸びないようにアイソクロナスセルになっている。従って、リング全体で考えてモーメントコンパクション因子 $\alpha$ は通常のリングと比べて1桁小さい。そのために、シンクロトロンチューンもバンチ長も $\alpha$ の平方根におよそ比例して小さくなり、横方向モードカップリング不安定性などの電流閾値が低くなることが予想される。PF-HLS リングの検討において横方向ビーム不安定性の事前の評価と対策が重要である。

## 2.2 インピーダンスモデル

ビーム不安定性を評価するためには、インピーダンスを定量的に評価しておく必要がある。インピーダンスの計算には真空ダクト等の詳細な構造が決まっている必要があるが、現状ではそこまでの詳細設計はまだ完了していない。そのため、同程度のアパーチャを持つ既存施設のインピーダンスモデル、具体的には NSLS-II や Diamond Light Source の Broad-Band Resonator (BBR) モデル[3-5]を参考に、 $Q = 1$  に対して共振周波数  $f_r = 30$  GHz、垂直方向のシャントインピーダンス  $R_t = 1$  M $\Omega$  をここでは仮定した。そのインピーダンス  $R_t$  がある場所のベータatron関数として $\beta_y = 5.22$  mを用いた。

## 3. 横方向ビーム不安定性の解析的研究

### 3.1 Vlasov 方程式による解析方法

ここでは、Vlasov 方程式による解析方法[6]を簡単に紹介する。シングルバンチでは、前方のバンチが誘起する電磁場(ウェーク場)が後方のバンチにキックを与える。これを head-tail 効果と呼び、これによる横方向振動の増大が head-tail 不安定性である。head-tail 不安定性ではバンチの head と tail がクロマティシティに依存してシンクロトロン振動を通して役割を入れ替わりながら横方向の振動が増大する。クロマティシティがゼロの場合、横方向振動の指数関数的な増大が起きる fast head-tail 不安定性が起きるが、これは周波数領域で振動のモードカップリングを伴うことから横方向モードカップリング不安定性 (TMCI: Transverse Mode-Coupling Instability) と呼ばれる。このような横方向ビーム不安定性の振動の成長率やチューンは Vlasov 方程式を使って解析的に得ることが

できる。ガウス分布形状を持つシングルバンチの場合、次の複素数 $\Omega$ に関する連立方程式を解くことで各振動モードの周波数と成長率を得ることができる。

$$\det \left[ \left( \frac{\Omega - \omega_\beta}{\omega_s} - l \right) \mathbf{I} - \mathbf{M} \right] = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{M}$  は下記の要素を持つ行列で、 $\mathbf{I}$  は単位行列である。

$$M_{kk'} = \frac{I_b \beta_t}{2v_s E/e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_t(\omega_p) g_{lk}(\omega_p - \omega_\xi) g_{l'k'}(\omega_p - \omega_\xi) \quad (2)$$

$$g_{lk}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k! (|l| + k)!}} \left( \frac{\omega \sigma_t}{\sqrt{2}} \right)^{|l|+2k} e^{-\frac{\omega^2 \sigma_t^2}{2}} \quad (3)$$

$$\omega_p = p\omega_0 + \omega_\beta + l\omega_s, \quad \omega_\xi = \xi\omega_0/\alpha \quad (4)$$

$\Omega$ の実部は振動の角周波数、虚部は振動の成長率を表す。ここで、 $\omega_0$ ,  $\omega_\beta$ ,  $\omega_s$ ,  $\sigma_t$ ,  $E$ ,  $I_b$ ,  $\alpha$ ,  $\xi$ は、周回角周波数、ベータatron角周波数、シンクロトロン角周波数、バンチ長、ビームエネルギー、バンチ電流、モーメントコンパクション因子、クロマティシティである。 $l$ と $k$ は azimuthal mode number 及び radial mode number で、 $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ である。

ここで非常に低電流における Eq. (1)の近似解を示すことは、不安定性のパラメータの依存性を理解する上で意味がある。1次の摂動解を求めると、1次のベータatron振動のチューンシフト $\Delta\nu_\beta^l$ と成長率 $g^l$ は次のようになる。

$$\Delta\nu_\beta^l = -\frac{1}{2^{|l|} 4\pi(E/e)} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Im}[Z_t(\omega_p)] \{ \sigma_t(\omega_p - \omega_\xi) \}^{2l} e^{-(\omega_p - \omega_\xi)^2 \sigma_t^2} \quad (5)$$

$$g^l = -\frac{1}{2^{|l|} 4\pi(E/e)} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Re}[Z_t(\omega_p)] \{ \sigma_t(\omega_p - \omega_\xi) \}^{2l} e^{-(\omega_p - \omega_\xi)^2 \sigma_t^2} \quad (6)$$

$\Delta\nu_\beta^l$ はインピーダンスの虚部、 $g^l$ は実部の関数で、両方ともに $I_b$ はもちろん $E$ ,  $\beta_y$ ,  $\sigma_t$ に依存する。さらに、 $\omega_\xi$ を介して $\alpha$ と $\xi$ にも依存している。

### 3.2 MOSES による TMCI 電流閾値の計算

前節で述べた解析的な方法を使って実際の TMCI の解析を MOSES[7]を使って行った。PF-HLS リング( $E = 2.5$  GeV,  $\alpha = 3.24 \times 10^{-5}$ ,  $v_s = 0.00202$ ,  $\beta_y = 5.22$  m)のバンチ長としては、RF 電圧 1.6 MV での自然バンチ長である 4.72 ps を考え、インピーダンスモデルとして 2.2 節で述べた BBR モデル( $Q = 1$ ,  $f_r = 30$  GHz,  $R_t = 1$  M $\Omega$ )を仮定した。Figure 2(a)(b)は、垂直方向のクロマティシティ $\xi_y = 0$ の場合に計算した $\Omega$ の実部である振動の角周波数と虚部である振動の成長率をシンクロトロン周波数で規格化したものをそれぞれ示している。azimuthal mode number は  $l = 1, 0, -1, -2$  を radial mode number  $k = 0, 1, 2$  を考えている。Figure 2(a)から  $l = 0, -1$  での2つのモードのチューンのカップリングによって横方向モードカップリングが 0.073 mA 付近で起き、Fig. 2(b)のように成長率が電流とともに急激に増大する結果となる。

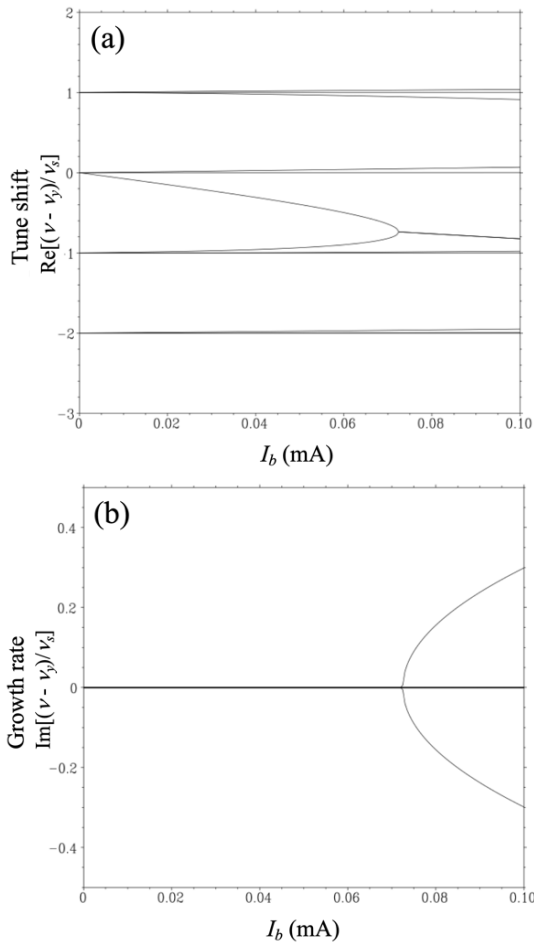


Figure 2: (a) Tune shifts and growth rates of vertical betatron oscillations normalized by synchrotron tune  $\nu_s$  at  $\xi_y = 0$  for  $0 \leq I_b \leq 0.1$  mA. Transverse mode coupling instability occurs at  $I_b = 0.073$  mA.

同じ 700~800 m の周長を持つ NSLS-II ( $E = 3.0$  GeV,  $\alpha = 3.70 \times 10^{-4}$ ,  $\nu_s = 0.00940$ ,  $\beta_y = 7.60$  m,  $\sigma_r = 15$  ps) [3] で TMCI の電流閾値を評価した結果、1 桁以上大きく、およそ 0.9 mA であることがわかった。この大きな閾値の違いとして NSLS-II の  $\nu_s$  が 0.0094 と PF-HLS リングの 0.00202 よりも 4 倍以上大きいことが挙げられる。これは、 $\nu_s$  が小さいと Eq. (5) で表される  $l = 0$  でのチューンシフトによってより低電流で  $\nu_s$  だけ離れた  $l = 0, -1$  の 2 つのチューンが重なりやすくなることから理解できる。また、NSLS-II のバンチ長が 15 ps と PF-HLS リングの 4.72 ps より大きいことももう 1 つの理由である。例えば、PF-HLS リングのシンクロトンチューンを 0.0094 とするだけで TMCI の電流閾値は 0.34 mA に、バンチ長を NSLS-II と同じ 15 ps にすることで 0.25 mA にそれぞれ増えることが MOSES の計算からわかった。バンチ内散乱(IFS)、potential-well distortion、microwave instability、高調波空洞の設置などによってバンチをある程度伸長できる可能性はある一方で、小さな  $\alpha$  に対して  $\nu_s$  を顕著に上げることは極めて難しい。蓄積電流値を上げる方法として、クロマチシティを上げることを次節で考える。

### 3.3 Head-tail 不安定性のクロマチシティ依存性

クロマチシティをゼロから正にして増やしていくことでシングルバンチの電流閾値を増やす手法はよく使われているが、PF-HLS リングでは  $\alpha$  が非常に小さいためにクロマチシティの変化に対する  $\omega_s$  を介したバンチスペクトルの変化が NSLS-II などの他のリングに比べて格段に大きいことが期待される。それを利用することで head-tail 不安定性の電流閾値の大幅な改善ができる可能性がある。そのために、PF-HLS リングでの head-tail 不安定性のクロマチシティ依存性を調べた。バンチ長としては、自然バンチ長である 4.72 ps をまずは考えた。MOSES による計算結果を Fig. 3 に示す。

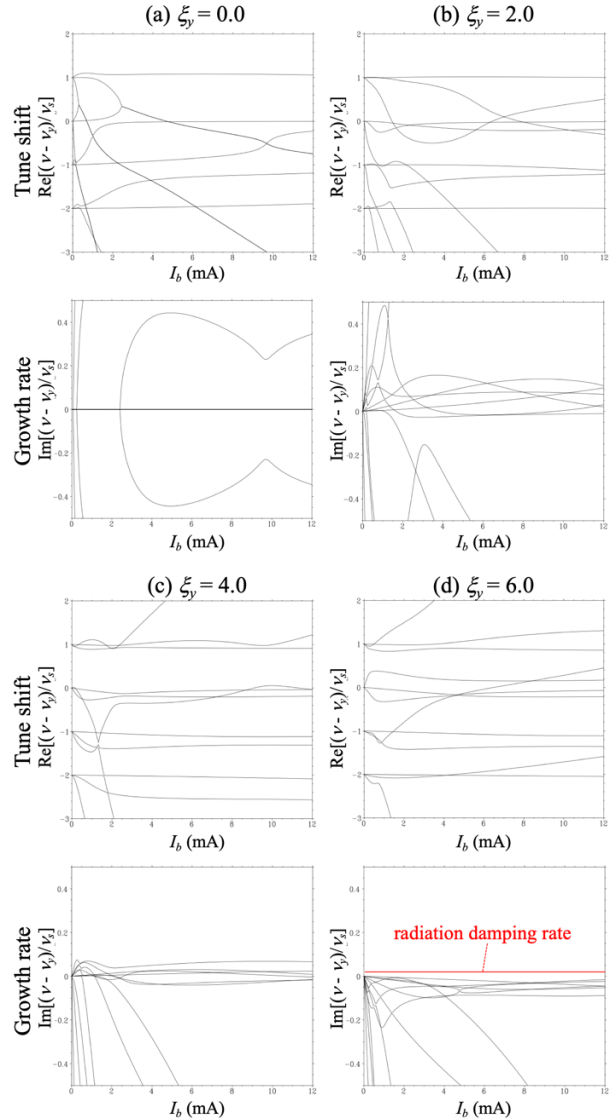


Figure 3: Tune shifts and growth rates of the head-tail oscillations normalized by  $\nu_s$  with (a)  $\xi_y = 0$  (b)  $\xi_y = 2$  (c)  $\xi_y = 4$  and (d)  $\xi_y = 6$  for  $0 \leq I_b \leq 12$  mA.

Figure 3 からわかるように、 $\xi_y$  を増やしていくと head-tail 不安定性の成長率が小さくなっていき、 $\xi_y = 6$  では考慮した全ての振動モード ( $l = 1, 0, -1, -2, k = 0, 1, 2$ ) の成長率が孤立バンチの目標電流である 12 mA まで放射減衰率を下回ることがわかった。このような顕著な改善は、

$\alpha$ を1桁程度大きくして計算した場合には見られなかった。つまり、この原因は $\alpha$ が極めて小さいために $\omega_s$ を介してバンチスペクトルに大きな変化が起こったためと結論される。これは、 $\alpha$ が極めて小さい場合でも head-tail 不安定性の成長率をクロマチシティの調整によって抑制できる可能性があることを意味している。

### 3.4 Head-tail 不安定性へのバンチ伸長効果

次に、バンチ長を NSLS-II と同じ 15 ps に増やした場合の MOSES による計算結果を Fig. 4 に示す。

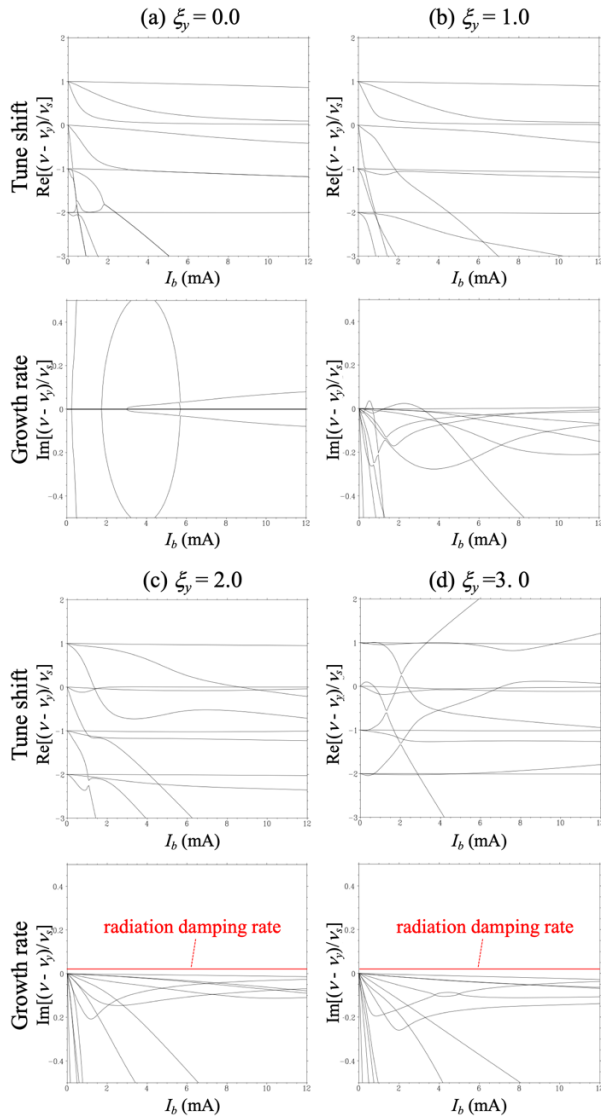


Figure 4: Tune shifts and growth rates of the head-tail oscillations normalized by  $v_s$  with (a)  $\xi_y = 0$ , (b)  $\xi_y = 1$ , (c)  $\xi_y = 2$  and (d)  $\xi_y = 3$  for  $0 \leq I_b \leq 12$  mA.

Figure 4 からわかるように、バンチ長 4.72 ps の場合と同く、 $\xi_y$ を増やしていくと head-tail 不安定性の成長率が小さくなっていく。ただし、この場合には $\xi_y = 2$ で既に考慮した全ての振動モード( $l = 1, 0, -1, -2, k = 0, 1, 2$ )の成長率が放射減衰率を下回る。これは、バンチの周波数スペクトル分布がバンチ長の増加で狭くなって head-tail 不安定性の成長率がさらに抑制されて小さくなったものと

理解できる。

## 4. まとめ

PF-HLS リングではモーメントコンパクション因子 $\alpha$ が非常に小さく、ビーム不安定性が通常リングよりも低電流で起きやすい。また、通常が多バンチ運転だけでなく大電流孤立バンチも含めたハイブリッド運転も求められている。PF-HLS リングの横方向インピーダンスを仮定して横方向ビーム不安定性を解析的な方法を用いて評価した結果、次のような研究成果と結論が得られた。

- 横方向モードカップリング不安定性の閾値は 0.073 mA で、NSLS-II と比べると 1 桁以上低い。これは、 $\alpha$ が小さいためにシンクロトロンチューン $v_s$ が小さいこととバンチ長 $\sigma_t$ が短いことが主な原因である。
- クロマチシティ $\xi_y$ をゼロから増やすことで head-tail 不安定性の成長率が急激に小さくなり、 $\xi_y$ を 6 まで増やすことで head-tail 振動( $l = 1, 0, -1, -2, k = 0, 1, 2$ )の成長率をシングルバンチ電流 12 mA までは放射減衰率以下に抑え込むことができた。これは、 $\alpha$ が非常に小さいことで通常のリングに比べてより小さな $\xi_y$ でバンチ周波数スペクトルを大きく変化できたためと考えられる。
- バンチ長を 4.72 ps から 15 ps まで伸長することによってバンチ周波数スペクトル幅が狭くなり、head-tail 不安定性を抑え込むための $\xi_y$ の値を顕著に下げられることがわかった。
- 今後は、より高次の振動モードの影響を調べるとともに、シミュレーションや他のコードとの比較も行っていく。

## 謝辞

所属する軌道・電磁石グループを始めとして加速器六系のメンバーとは次期光源打ち合わせや検討会を通して有益な議論をさせていただきました。特に、山本尚人氏にはこの研究に対して励ましと貴重な助言をいただきました。この場を借りて感謝致します。

## 参考文献

- [1] K. Harada *et al.*, "Conceptual design of the Hybrid Ring with superconducting linac", J. Synchrotron Rad. **29**, 118-124 (2022). doi:10.1117/12.813551
- [2] Photon Factory Hybrid Light Source(PF-HLS) Conceptual Design Report (CDR) ver. 1 (2024). <https://www.euvlitho.com/2019/S1.pdf>
- [3] S. Krinsky *et al.*, "Collective effects in the NSLS-II storage ring", Proceedings of PAC07, pp.1344-1346 (2007).
- [4] V. Smalk, G. Bassi, A. Blendnykh, and A. Khan, "Combined effect of chromaticity and feedback on transverse head-tail instability", Phys. Rev. Accel. Beams **24**, 054401 (2021).
- [5] V. Smaluk, I. Martin, R. Fielder, and R. Bartolini, "Beam-based model of broad-band impedance of the Diamond LightSource", Phys. Rev. ST Accel. Beams **18**, 064401 (2015).
- [6] A. W. Chao, "Physics of collective beam instabilities in high energy accelerators", Wiley-Interscience Publication (1993).
- [7] Y. H. Chin, MOSES (MOde coupling Single-bunch instability in an Electron Storage ring). <https://abci.kek.jp/moses.htm>