

# サイクロトロン及びシンクロ・サイクロトロンの新たな軌道理論の枠組み

佐藤健次<sup>A)</sup>、宮脇信正<sup>B)</sup>、佳元壮一郎<sup>A)</sup>

<sup>A)</sup>大阪大学核物理研究センター 〒567-0047 大阪府茨木市美徳ヶ丘 10-1

<sup>B)</sup>日本原子力研究所高崎研究所放射線高度利用センター 〒370-1292 群馬県高崎市綿貫町 1233

## 概要

サイクロトロン及びシンクロ・サイクロトロンでは、粒子は、異なる位相を持ち、異なる渦巻き状軌道を描きながら加速され、この軌道を外れて運動する粒子は、その周りに、ベータトロン振動するものと考えられる。このような運動は、シンクロトロンの軌道理論をお手本にすると、前者は縦方向運動で、後者は横方向運動、即ち、ベータトロン振動と見做すことが出来る。

ところで、異なる位相に対して、異なる渦巻き状軌道を描く加速運動を縦方向運動と見做すには、先ず、基準となる渦巻き状軌道を描く加速運動を求めておく必要がある。

しかし、これまで、基準となる運動を求める解法は知られていなかったが、逆転の発想とも言える解法を考え出すことが出来たので、それを求めることが出来るようになった。その結果、任意の磁場分布と任意の加速電圧(周波数と振幅)の下での、任意の粒子の運動を、縦方向運動とベータトロン振動との重ねあわせとして求めるための、二段階構成の、新たな軌道理論を構築出来ることが分かった。

今回は、新たな軌道理論の枠組みと、それを考え付いた経緯の他、非線形性故に等時性サイクロトロンが存在出来ない事情、等々について報告する。

## 1 序論

新たな軌道理論は二段階構成になっている。第一段階では、一周当たりのエネルギー・ゲインを与えたときの、基準となる渦巻き状軌道を描く加速運動を想定し、その運動を実現する磁場分布を求める。この磁場分布の下で運動方程式を解けば、当然、基準とした運動が求まる。実際の解法としては、逆転の発想が必要であった訳である。

第二段階では、任意の磁場分布と任意の加速電圧とを与えたとき、それらが第一段階のそれぞれからずれているとして、そのときの、粒子の運動を、第一段階で想定した基準となる運動からの、ずれの運動として、縦方向運動とベータトロン振動の重ね合わせとして求める。

このとき、解法の構造からして、ずれがある磁場分布と加速電圧の下では、縦方向運動の基準として想定した運動は存在していないことに注意すべきで、その点も目新しい。

これらのいずれの段階においても、解くべき式の多くは非線形微分方程式となり、また、特に、サイクロトロンにおいては、非線形性故に、等時性サイクロトロンが存在出来ないため、その解としての運動は、多種多様で複雑な様相を呈する。今回報告する研究では、こうした振る舞いの解明に重点を置いているため、元々の解くべき運動方程式を単純化しているが、本文では、それらの式を示すことを省略しているため、以下に、その概要を纏めておく。

磁場分布は、その強度が、実際には、方位角方向に変化しているが、それを一様とし、軌道半径のみで定まるものとした。また、高周波加速は、実際には、加速間隙で衝撃

的に行われるが、それを粒子の進行方向に絶え間なく加速され続ける波乗り加速とした。以上により、元々、4つある、解くべき運動方程式の全てを、円柱座標系を用いて表現した。そのとき、これらの式は、位相と角速度とエネルギーと軌道半径の四つの変量の関係を与えている。

## 2 シンクロトロンの軌道理論に学ぶ

構築出来た新たな軌道理論を振り返って見ると、結果的には、シンクロトロンの軌道理論がお手本であった。

### 2.1 シンクロナス粒子

シンクロナス粒子が満たす関係式では、実効的な加速電圧は磁場の時間変化率に比例するが、それを、実効的な加速電圧を与えたとき、磁場を定める式と読むことにする。

ところで、磁場は運動方程式に現れるが、それを積分して解いても、磁場の時間変化率が現れることはない。この関係式は、運動方程式を時間で微分し、シンクロナス粒子と言う特殊な運動を想定し、そのときの特殊な条件を代入することで求まり、その結果、磁場が定まったのである。

サイクロトロン及びシンクロ・サイクロトロンにおいても、運動方程式を時間で微分し、基準となる粒子と言う特殊な運動を想定し、そのときの特殊な条件を代入することで、磁場が定まると考えて良いことになる。

シンクロトロンにおいて、シンクロナス位相を一定に保つことは可能である。しかし、その他の粒子はシンクロトロン振動しており、等時性は成立していない。

サイクロトロンにおいて、パンチしたビームの位相を測定したとき、それが一定であっても、何等かの振動現象が発生していて、等時性が実現されていない可能性がある。

### 2.2 縦方向運動=シンクロトロン振動

位相と角速度とエネルギーと軌道半径の四つの変量のうち、縦方向運動の通常の定式化では、軌道半径のずれと角速度のずれとを消去して、エネルギーのずれと位相のずれとの連立微分方程式を解く形が多い。しかし、ここで忘れてならないことは、運動量がずれた粒子は、閉軌道を描くときの分散関数を通して、軌道半径がずれており、それと同時に、位相がシンクロナス位相からずれていることである。位相に応じて、異なる軌道を描いていることになる。

サイクロトロン及びシンクロ・サイクロトロンにおいても、基準となる粒子の渦巻き状軌道の位相からずれた場合、その位相に応じ異なる渦巻き状軌道を描くと考えられる。

### 2.3 横方向運動=ベータトロン振動

位相と角速度とエネルギーと軌道半径の四つの変量の関係において、エネルギーの変化は全て縦方向運動で定まり、エネルギーはベータトロン振動しないとする。そのとき、角速度のずれを消去してやると、位相のずれと軌道半

径のずれの二つの変量が連立した式を得るが、ベータatron振動の通常の定式化では、位相のずれを消去して、軌道半径のずれのみの時間による微分方程式を解くことが多い。しかし、ここで忘れてならないことは、位相がベータatron振動することである。そのため、瞬時的には、実効加速電圧がベータatron振動するが、それにも拘わらず、エネルギーはベータatron振動しないとされている。

サイクロtron及びシンクロ・サイクロtronでも、軌道半径はベータatron振動し、位相もベータatron振動するが、エネルギーはベータatron振動しないと良い。

## 2.4 偏向磁場がずれたときの粒子の運動の変化

シンクロtronにおいて、偏向磁場に静的なずれがあるとき、閉軌道の歪みが計算されている。しかし、そのときの、チューンのずれや、粒子の周回周期のずれを計算する式が見当たらず、縦方向運動の変化は明らかではない。

サイクロtron及びシンクロ・サイクロtronの新たな軌道理論では、縦方向運動を磁場のずれに対して計算するが、シンクロtronはお手本にならないと考えられる。

## 3 今回の研究に着手した切っ掛け

### 3.1 リーディング・タームとしての非線形項

今回の研究に着手したそもそもの切っ掛けは、サイクロtronでの粒子の運動を、位相空間(横軸:位相、縦軸:エネルギーのずれ)での運動として描こうとして、何をどう描けば良いのか、皆目、見当が付かなかったことにある。

従来の等時性サイクロtronの軌道理論に従えば、位相空間での全ての粒子の運動は、静止した安定不動点とせざるを得ず、運動の描きようがなかったためである。これは、位相の時間変化率の式に現れるエネルギーのずれの項を、そのずれの線形一次で近似し、かつ、等時性条件、即ち、粒子のエネルギーが、常に、トランジション・エネルギーに一致するとして、その項の係数をゼロにしたためである。

しかし、エネルギーのずれは厳然として存在するので、リーディング・タームを残すのが物理と考え、そのずれの二乗の項を残した。その結果、エネルギーがずれた粒子は、位相空間で静止することなく動くことになり、等時性サイクロtronそのものが存在出来ないことになった。

約50年前、FFAG加速器を提案[1]した著者自らが、FFAG加速器の高周波加速の方法を論じた論文[2]で、トランジション・エネルギーのとき、エネルギーのずれを非線形の形で取り扱っていることを最近知った。心強い味方である。

### 3.2 磁場のずれの正負と非線形項との関係

等時性は存在出来ないと言う、驚くべきと言うか、由々しき結論に達したが、間接的ではあるが、それを証左する、不可思議な現象が、核物理研究センターのAVFサイクロtronで、観測されていた。[3]サイクロtronの磁場が2ppm高くなって正にずれると、取り出しビームのエネルギーの幅が3倍以上広がるが、磁場が低くなって負にずれても、それほど変化しなかったと言う現象が、それである。

位相の時間変化率の式に、エネルギーのずれの二乗の項が含まれているが、磁場のずれも、その式に付け加わる。磁場のずれの符号が正の場合には、位相の時間変化率をゼロにする、エネルギーのずれの値として、符号が正負の、

二つの根がある。一方が安定不動点とすれば、他方は不安定不動点となるため、安定領域が生じて、エネルギーが広がる。このときの広がり、磁場のずれの平方根で定まるので、観測のような大きな値になる。これに対して、磁場のずれの符号が負の場合には、位相の時間変化率がゼロになることはなく、エネルギーが広がる現象は起こらない。

## 4 二段階構成の新たな軌道理論

### 4.1 第一段階: 基準の運動を実現する磁場分布

先ず最初に、基準となる粒子の渦巻き状軌道を描く加速運動を求める必要がある。シンクロtron粒子の関係式を得る手順に倣った解法が、第一段階である。先ず、基準となる粒子の特殊な運動を想定し、そのときの特殊な条件を、一連の運動方程式を必要な回数だけ時間で微分して得られる複数の式に代入して、変数の数を減らし、簡単化する。次に、軌道半径及び磁場や磁場の軌道半径による微分以外の変数を代数的に消去して、磁場の軌道半径による微分方程式を得てやり、それを解けば、磁場分布が求まる。

ただし、渦巻き状軌道を描くときの軌道半径の時間変化率はノンゼロであるので、磁場の時間微分は磁場の軌道半径による微分と軌道半径の時間変化率との積で表せば良い。高階微分の場合は、同様の手順を繰り返せば良い。

ここで、特殊な条件を纏めておく。サイクロtronの場合、一周当たりのエネルギー・ゲインを一定とし、位相を一定とし、角速度を一定とする。このとき、磁場分布を求める式は、軌道半径による一階の非線形微分方程式となる。

なお、ここで与えたエネルギー・ゲインに対して、位相がゼロとなるときの加速電圧の振幅を求めておき、今後、それを基準として、振幅のずれの議論を行うものとする。

シンクロ・サイクロtronの場合、一周当たりのエネルギー・ゲインを一定とし、位相を一定とし、角速度については、時間微分を一定とする。このとき、磁場分布を求める式は、軌道半径による二階の非線形微分方程式となる。

### 4.2 第二段階: 縦方向運動とベータatron振動

第二段階では、任意の磁場分布と任意の加速電圧(周波数と振幅)の下での、任意の粒子の運動を求める。通常は、運動方程式を直接積分して、その解としての運動を求めるところ、ここでは、磁場分布と加速電圧が、第一段階のそれぞれからずれているとし、粒子の運動も、第一段階で想定した、基準となる粒子の運動からのずれとして、諸量のずれに関する運動方程式を積分し、その解として求める。

このとき、ずれは微量であるので、多くは線形一次の近似を行い、簡単化する。しかし、実効加速電圧に含まれる位相の三角関数の項と、サイクロtronの場合のローレンツ因子のずれについては、そのままの形で残り、非線形の形としておく。シンクロ・サイクロtronの場合のローレンツ因子のずれについては、線形一次で近似して良い。

こうした近似の結果得られる、ずれに関する運動方程式はかなり簡単になり、解も得やすく、運動の形態も理解し易くなる。さて、運動は、時間的にゆっくりと円滑に変化する運動と、その周りに、高速で変化する運動の重ね合わせとして良く、前者は縦方向運動で、後者はベータatron振動となる。このとき、ベータatron振動は、縦方向運動の周りの運動として求めるので、その影響を受ける。しかし、

位相がベータトロン振動しても、エネルギーはベータトロン振動しないものとする。

ところで、第一段階の磁場分布と加速電圧は、第二段階のそれぞれとは異なっているので、基準粒子の運動は、一般的には、第二段階では存在しないことには要注意である。

#### 4.3 サイクロトロン安定領域での加速の勧め

磁場の強さを、第一段階よりも高めに設定すると、位相の時間変化率がゼロになるエネルギーのずれが正負の二つ発生することを、第3章第3.2節で論じた。このとき、加速電圧の周波数は第一段階のものと同じと仮定しており、正しくは、磁場だけのずれではなく、磁場のずれと加速周波数のずれとの組み合わせであり、その正負を論じる。

サイクロトロンの場合、実効加速電圧は位相の余弦関数で与えられるので、加速電圧の振幅を高い側にずらして、ずれを正にすると、エネルギーのずれの時間変化率をゼロにする位相として、正負の符号のものが二つが発生する。

以上のように、磁場のずれと加速周波数のずれとの組み合わせの符号と、加速電圧の振幅のずれの符号に応じて、縦方向運動の非線形運動の様相が異なる。これらのずれが、正、ゼロ、負、の三通りの符号がそれぞれ可能で、合計9通りの運動形態が発生し、多種多様に複雑な様相を呈する。

このうち、二つのずれの符号が同時に正の場合だけ、非線形振動が発生して安定領域を作るが、それぞれのずれの二つのゼロ根の、一方が安定不動点で他方が不安定不動点になるので、安定領域は、複数、発生することになる。[2]

このとき、安定領域の一つにビームを入射して加速を行えば、安定な加速が実現出来る。また、安定領域の中心に位置する粒子の位相を一定に出来ると考えて良いので、見掛け上は、等時性が実現しているかのように出来る。また、このとき、安定領域の中心に位置する粒子を、改めて、第二段階での「基準」と定義し直しても良いことになる。

以上により、安定領域を作った加速がお勧めである。

#### 4.4 ベータトロン振動に影響する縦方向運動

縦方向運動の周りをベータトロン振動するが、それは、前者の運動の変量が、後者の運動方程式に現れることである。特に、縦方向運動の角速度の時間変化率の正負の符号は、ベータトロン振動の振幅の減衰や成長に影響する。

#### 4.5 運動の定数と断熱不変量

縦方向運動の、例えば、位相のずれとエネルギーのずれとの組み合わせ、さらに、ベータトロン振動の、軌道半径のずれとその時間微分との組み合わせにおいて、それぞれの時間変化率が他の変量のみで与えられる。このとき、これらの式を積分することにより、運動の定数が求まる。

また、サイクロトロンベータトロン振動、シンクロ・サイクロトロン縦方向運動及びベータトロン振動は、全て、振動運動、即ち、周期運動であるので、作用変数を計算出来る。また、サイクロトロンで安定領域を作った加速する場合には、これまた、周期運動であるので、作用変数を計算することが出来る。作用変数は断熱不変量であるから、時間の変化に伴う変量の変化に対して、不変である。

運動の定数及び断熱不変量の二つ共、入射のときの運動と取り出しのときの運動との間の関係を、磁場のずれや加速電圧のずれを与えることで、直接、与えることが出来る。

## 5 議論

### 5.1 磁場のフィールド・インデックス

従来の等時性サイクロトロン磁場分布は、エネルギー・ゲインとは無関係に、軌道半径と角速度とで定まり、そのフィールド・インデックスは、等時性条件を与える。

これに対し、新たな軌道理論の第一段階で求めた、サイクロトロン及びシンクロ・サイクロトロン磁場分布は、一周当たりのエネルギー・ゲインの関数で、非線形微分方程式の解であるが、未だ、解を得ることが出来ていない。フィールド・インデックスも知りたいので、それを再現実現できる、磁場分布の解析解を、近似で良いから、知りたい。

### 5.2 サイクロトロン非線形の形

第3章第3.2節で、エネルギーのずれの非線形の形を二乗としたが、最近、それでは不十分であることに気付いた。三乗を付け加えることには気乗りしないので、第4章第4.2節では、ローレンツ因子そのままの形で残すと書いた。

### 5.3 安定領域の重なり

サイクロトロンでの加速において、縦方向運動に対して、安定領域を作ることをお勧めした。また、シンクロ・サイクロトロンでは安定領域の下で加速される。どちらも、渦巻き状軌道を描く加速運動であるので、位相空間の縦軸を、エネルギーの絶対値あるいは軌道半径の絶対値で表現し、そこに安定領域を重ねて描くと、理解し易くなる。

ところで、安定領域の寸法が大きい場合には、周回数異なるときの安定領域が重なる。特に、サイクロトロンの場合の複数の安定領域の重なりは、複雑な様相を呈する。

### 5.4 サイクロトロン見直しの必要性

従来のサイクロトロン軌道理論に基づいて、数多くの方法が開発されて来た。これに対して、新たな軌道理論では非線形運動が起こるので、それらの見直しが必要である。

中心バンパ、位相スリット、位相のバンチング、フラット・トップ、オフ・センタリング、取り出し付近でのハーモニク磁場による歳差運動、等々が、その対象である。

### 5.5 相対論による低速領域での運動の見直し

サイクロトロン新たな軌道理論で、エネルギーのずれに対して、非線形運動が起こるのは、特殊相対論の効果であると考えられる。しかも、この非線形運動は、低速領域でも起こるが、通常、低速領域では、非相対論で良いとされており、その場合は、線形運動になると考えられる。

低速領域での、特殊相対論と非相対論の差が大きいことになるが、そのような差が生じる理由は、磁場と電場が共存する場合、電場/磁場は速度を与え、光速とは異なる、もう一つの速度が存在するためと思われ、要検討である。

## 参考文献

- [1] K.R.Symon et al., *Phy.Rev.*103(1956)1837-1859.
- [2] K.R.Symon et al., *Proc. of CERN Symposium* (1956)44-58.
- [3] 佐藤健次他、日本物理学会講演概要集、第57巻第1号 第1分冊 (2002)90.