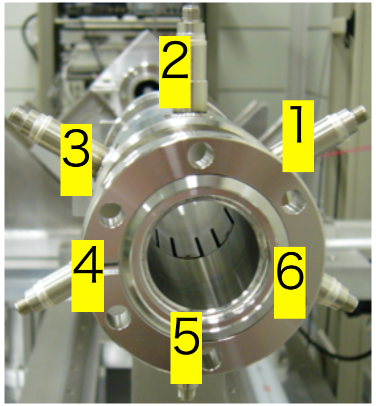
SPring-8線型加速器六電極ビーム位置モニタによる二次相対モーメントの測定とその応用

柳田謙一、公益財団法人高輝度光科学研究センター
光源基盤部門　加速器機器グループ　入射器チーム

内容



⓪はじめに（研究の動機）

- スクリーンモニタによるビームサイズ測定では、ビーム中心から離れた、ノイズレベルと同等な検知出来ない要素が存在←サイズ測定に影響(PASJ2014)
- サイズに関する量が直接得られる測定はないか？
- ビームの四重極モーメント測定によるエミッタンス測定（右図、1983年のHEACのProc. Miller氏他）
- 上司の勧めやSACLA入射部に八電極BPM
  →四重極モーメントの測定を検討（2008年頃）
  →最終的にはツイスパラメータ
  （エミッタンス）測定まで持って行く
- LINAC全体に亘って四重極モーメントを測定すれば常時エンベロープも監視できるのでは？

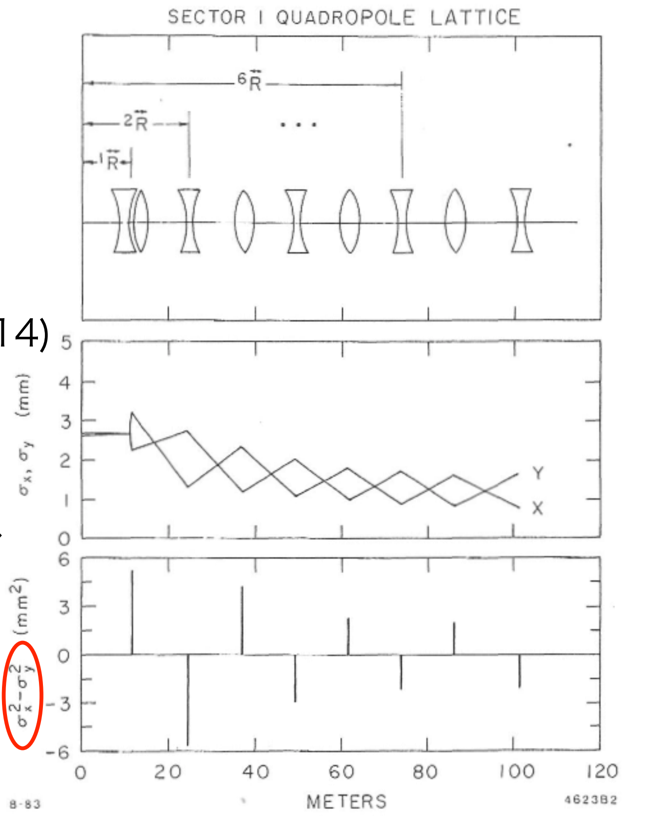


Fig. 4. (a) Quadrupole lattice in first 100 meters of the linac; (b) σ_x and σ_y versus z; (c) $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ versus z.

R. H. Miller他, "Nonintercepting Emittance Monitor", Proc. 12th Int. Conf. High-Energy Accel. (HEAC'83), Fermilab USA, 1983, pp. 603-605.より

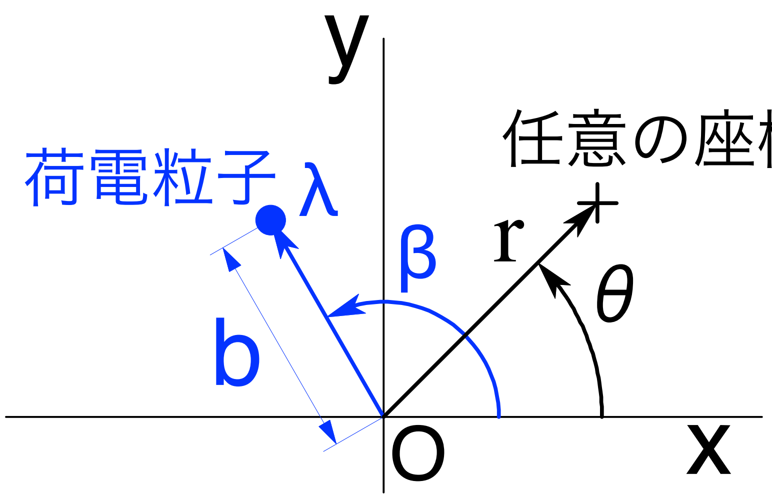
⓪はじめに（研究の動機）

- $\sigma_x^2 - \sigma_y^2$ を測定する。測定精度（分解能）は何で決まる？
  →信号処理回路のノイズレベル
  ＋機械中心に対する測定位置の絶対精度（当初は知らなかった）
- 回路のノイズレベルと測定精度の関係を知らないと
  実際にツイスパラメータ測定が可能かどうかわからない➡多分可能
  （n次モーメントは信号電圧差分と実効開口半径のn乗に比例する
  誤差伝播の式から測定精度が求まる、実効開口半径n乗大⇒誤差大）
- ビームベースドの較正と再帰号計算によるモーメント補正等を理解し、
  計算を行うには、シンプルなn次モーメント表現が必要
  （x, yでの表現より、r･cosnθ, r･sinnθ の方が計算しやすい）

①ビーム持つn次絶対モーメントとは？

・二次元で考える→電磁気学的には長手(z)方向に無限に長い

・任意の原点Oから極座標で(b, β)の位置に点電荷（線密度λ [C/m]）



任意の位置座標を(r, θ)と表す

点電荷の分布関数

$$\lambda\delta(r-b)\frac{\delta(\theta-\beta)}{r} \quad [C/m^3]$$

注）$\delta(r-b)$ $[1/m]$, $\dfrac{\delta(\theta-\beta)}{r}$ $[1/m]$

$$注)\ \delta(\theta-\beta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left\{n\left(\theta-\beta\right)\right\}\right] \quad \left(-\pi<\theta\le\pi\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos n\theta\cos n\beta+\sin n\theta\sin n\beta\right\}\right] \quad \left(-\pi<\theta\le\pi\right)$$

①ビーム持つn次絶対モーメントとは？

・単粒子n次絶対電荷余弦モーメント：$\lambda p_n \left[C/m\cdot m^n\right]$

$$\lambda p_n = \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \lambda\delta(r-b)\frac{\delta(\theta-\beta)}{r}\underline{r^n\cos n\theta r}d\theta dr$$

$$= \lambda\int_0^\infty \delta(r-b)r^n dr \cdot \int_{-\pi}^{\pi}\delta(\theta-\beta)\cos n\theta\, d\theta$$

$$= \lambda b^n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos n\theta\cos n\beta+\sin n\theta\sin n\beta\right\}\right]\cos n\theta\, d\theta$$

$$= \lambda b^n \frac{1}{\pi}\cos n\beta\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 n\theta\, d\theta$$

$$= \lambda b^n\cos n\beta$$

$$p_n = b^n\cos n\beta\left[m^n\right]$$ （単粒子n次絶対余弦モーメント）

①ビーム持つn次絶対モーメントとは？

・単粒子n次絶対電荷正弦モーメント：$\lambda q_n \left[C/m \cdot m^n\right]$

$$\lambda q_n = \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \lambda\delta(r-b)\frac{\delta(\theta-\beta)}{r} \underline{r^n \sin n\theta} r d\theta dr$$

$$= \lambda \int_0^\infty \delta(r-b) r^n dr \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta-\beta)\sin n\theta \, d\theta$$

$$= \lambda b^n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos n\theta \cos n\beta + \sin n\theta \sin n\beta\right\}\right] \sin n\theta \, d\theta$$

$$= \lambda b^n \frac{1}{\pi} \sin n\beta \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 n\theta \, d\theta$$

$$= \lambda b^n \sin n\beta$$

$$q_n = b^n \sin n\beta \left[m^n\right]$$ （単粒子n次絶対正弦モーメント）

①ビーム持つn次絶対モーメントとは？

・n次絶対電荷余弦モーメント：$\Lambda P_n \left[C/m \cdot m^n\right]$

$$\Lambda P_n = \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{N=1}^{M}\lambda\delta(r-b_N)\frac{\delta(\theta-\beta_N)}{r}r^n\cos n\theta r d\theta dr$$

$$= \lambda\sum_{N=1}^{M}\int_0^{\infty}\delta(r-b_N)r^n dr \cdot \int_{-\pi}^{\pi}\delta(\theta-\beta_N)\cos n\theta\, d\theta$$

$$= \lambda\sum_{N=1}^{M} b_N^n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos n\theta\cos n\beta_N + \sin n\theta\sin n\beta_N\right\}\right]\cos n\theta\, d\theta$$

$$= \lambda\sum_{N=1}^{M} b_N^n\cos n\beta_N = \lambda\sum_{N=1}^{M} p_{Nn}$$

$$\Lambda = M\lambda \;\Rightarrow\; P_n = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{Nn}\,[m^n]$$ （n次絶対余弦モーメント）

$$p_{Nn} = b_N^n\cos n\beta_N\,[m^n]$$ （N番目粒子n次絶対余弦モーメント）

①ビーム持つn次絶対モーメントとは？

・n次絶対電荷正弦モーメント：$\Lambda Q_n\ \left[C/m \cdot m^n\right]$

$$\Lambda Q_n = \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{N=1}^{M} \lambda \delta(r - b_N) \frac{\delta(\theta - \beta_N)}{r} r^n \sin n\theta r d\theta dr$$

$$= \lambda \sum_{N=1}^{M} \int_0^\infty \delta(r - b_N) r^n dr \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta - \beta_N) \sin n\theta \, d\theta$$

$$= \lambda \sum_{N=1}^{M} b_N^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\cos n\theta \cos n\beta_N + \sin n\theta \sin n\beta_N\right\}\right] \sin n\theta \, d\theta$$

$$= \lambda \sum_{N=1}^{M} b_N^n \sin n\beta_N = \lambda \sum_{N=1}^{M} q_{Nn}$$

$$\Lambda = M\lambda \ \Rightarrow \ Q_n = \frac{1}{M} \sum_{N=1}^{M} q_{Nn}\ [m^n]$$ （n次絶対正弦モーメント）

$$q_{Nn} = b_N^n \sin n\beta_N\ [m^n]$$ （N番目粒子n次絶対正弦モーメント）

①ビーム持つn次絶対モーメントとは？

・n次絶対モーメントの極座標表示

以下を満たす $\left(a_n, \alpha_n\right)$ が存在する！

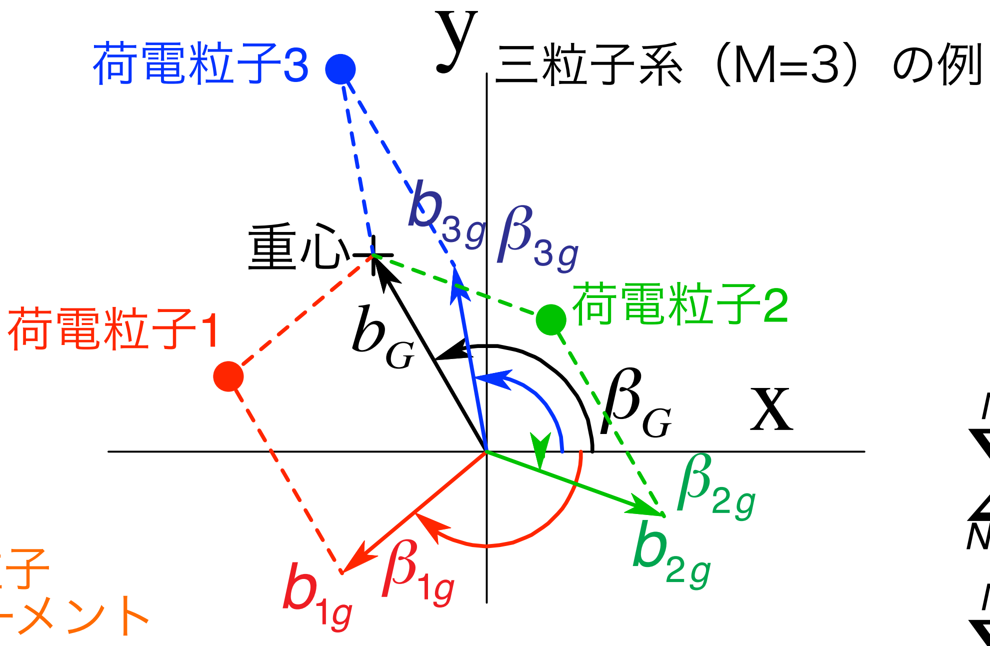
$$P_n = a_n^n \cos n\alpha_n$$ （n次絶対余弦モーメント）

$$Q_n = a_n^n \sin n\alpha_n$$ （n次絶対正弦モーメント）

$$p_{Nn} = b_N^n \cos n\beta_N$$ （N番目粒子n次絶対余弦モーメント）

$$q_{Nn} = b_N^n \sin n\beta_N$$ （N番目粒子n次絶対正弦モーメント）

②n次相対モーメントの算出



$$p_{Gn} = b_G^n \cos n\beta_G$$
$$q_{Gn} = b_G^n \sin n\beta_G$$

n次重心モーメント

$$p_{Ngn} = b_{Ng}^n \cos n\beta_{Ng}$$
$$q_{Ngn} = b_{Ng}^n \sin n\beta_{Ng}$$

N番目粒子n次
相対モーメント

$$\sum_{N=1}^{M} p_{Ngn} = \sum_{N=1}^{M} b_{Ng}^n \cos n\beta_{Ng} = 0$$

$$\sum_{N=1}^{M} q_{Ngn} = \sum_{N=1}^{M} b_{Ng}^n \sin n\beta_{Ng} = 0$$

N番目粒子
絶対モーメント

$$p_{N1} = p_{G1} + b_{Ng} \cos \beta_{Ng}$$
$$p_{N2} = p_{G2} + 2b_G b_{Ng} \cos(\beta_G + \beta_{Ng}) + p_{Ng2}$$
$$p_{N3} = p_{G3} + 3b_G^2 b_{Ng} \cos(2\beta_G + \beta_{Ng}) + 3b_G b_{Ng}^2 \cos(\beta_G + 2\beta_{Ng}) + p_{Ng3}$$
$$p_{N4} = p_{G4} + 4b_G^3 b_{Ng} \cos(3\beta_G + \beta_{Ng}) + 6b_G^2 b_{Ng}^2 \cos(2\beta_G + 2\beta_{Ng}) + 4b_G b_{Ng}^3 \cos(\beta_G + 3\beta_{Ng}) + p_{Ng4}$$

N番目粒子
相対モーメント

重心モーメント

クロス項

②n次相対モーメントの算出

全体のモーメントは各粒子が持つモーメントの和

$$P_1 = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{N1} = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{G1} + \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} b_{Ng}\cos\beta_{Ng}}_{零項}$$

$$P_2 = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{N2} = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{G2} + \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} 2b_G b_{Ng}\cos(\beta_G + \beta_{Ng})}_{零項} + \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{Ng2}$$

$$P_3 = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{N3} = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{G3} + \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} 3b_G^2 b_{Ng}\cos(2\beta_G + \beta_{Ng})}_{零項}$$

$$+ \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} 3b_G b_{Ng}^2\cos(\beta_G + 2\beta_{Ng}) + \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{Ng3}$$

$$P_4 = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{N4} = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{G4} + \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} 4b_G^3 b_{Ng}\cos(3\beta_G + \beta_{Ng})}_{零項}$$

$$+ \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} 6b_G^2 b_{Ng}^2\cos(2\beta_G + 2\beta_{Ng}) + \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} 4b_G b_{Ng}^3\cos(\beta_G + 3\beta_{Ng}) + \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{Ng4}$$

相対モーメント

絶対モーメント

重心モーメント

②n次相対モーメントの算出

絶対モーメント

重心モーメント

$$P_1 = p_{G1}$$

$$P_2 = p_{G2} + P_{g2}$$

相対モーメント

$$P_3 = p_{G3} + 3b_G a_{g2}^2 \cos(\beta_G + 2\alpha_{g2}) + P_{g3}$$

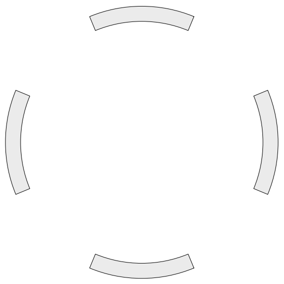
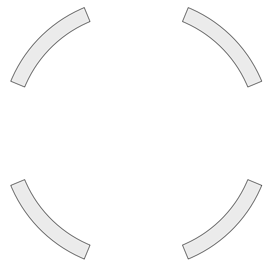
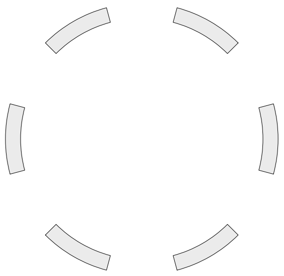
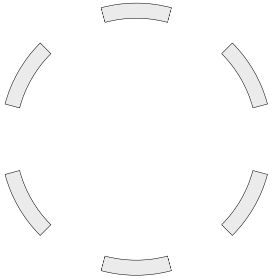
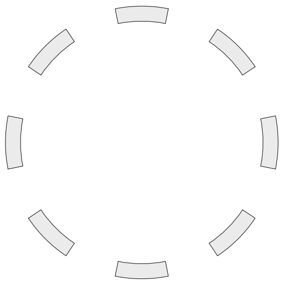
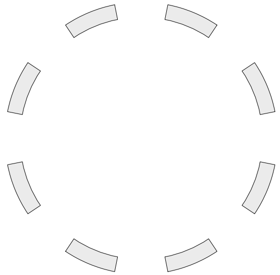
$$P_4 = p_{G4} + 6b_G^2 a_{g2}^2 \cos(2\beta_G + 2\alpha_{g2}) + 4b_G a_{g3}^3 \cos(\beta_G + 3\alpha_{g3}) + P_{g4}$$

$$P_{gn} = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{Ngn} = a_{gn}^n \cos n\alpha_{gn}$$

$$Q_{gn} = \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} q_{Ngn} = a_{gn}^n \sin n\alpha_{gn}$$

重心モーメントはビーム位置によって変化
相対モーメントはビーム形状によって変化
絶対モーメントはビーム位置及びビーム形状によって変化
ビーム形状はそのままでビーム位置のみを変化させた時、
1つでも相対モーメントが変化するならば、その測定は正しく無い

②n次相対モーメントの算出

BPM電極配置	測定可能なモーメント			BPM電極配置	測定可能なモーメント		
	Λ P_1, Q_1 P_2	or	Λ P_1, Q_1 P_{g2}		Λ P_1, Q_1 Q_2	or	Λ P_1, Q_1 Q_{g2}
	Λ P_1, Q_1 P_2, Q_2 P_3	or	Λ P_1, Q_1 P_{g2}, Q_{g2} P_{g3}		Λ P_1, Q_1 P_2, Q_2 Q_3	or	Λ P_1, Q_1 P_{g2}, Q_{g2} Q_{g3}
	Λ P_1, Q_1 P_2, Q_2 P_3, Q_3 P_4	or	Λ P_1, Q_1 P_{g2}, Q_{g2} P_{g3}, Q_{g3} P_{g4}		Λ P_1, Q_1 P_2, Q_2 P_3, Q_3 Q_4	or	Λ P_1, Q_1 P_{g2}, Q_{g2} P_{g3}, Q_{g3} Q_{g4}

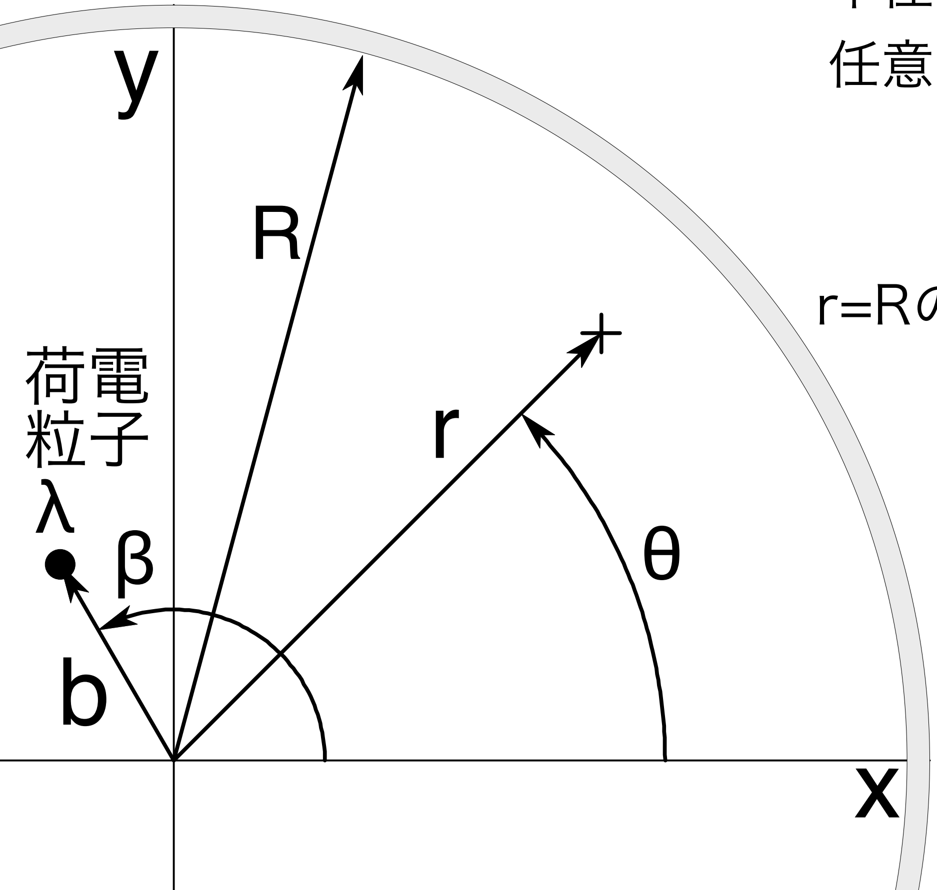
電極数が多いと測定可能な相対モーメント増える⇒較正等の精度（確度）上がる

③n次絶対モーメントの寄与と実効開口半径

・半径Rの円形断面金属パイプを考える。

・荷電粒子との相互作用は静電的

・電極出力は表面電界に比例



半径Rの金属パイプ中のビーム位置を(b, β)とする。

任意の位置(r, θ)の動径方向電場 $E_r(r,\theta)$は $b \ll r \sim R$ 時

$$E_r(r,\theta) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} b^n \left(\underbrace{\frac{1}{r^{n+1}}}_{\text{ビーム}} + \underbrace{\frac{r^{n-1}}{R^{2n}}}_{\text{鏡像}}\right)\cos\{n(\theta-\beta)\}\right]$$

r=Rの時

$$E_r(R,\theta) = \frac{\lambda}{2\pi R\varepsilon_0}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{R^n}\cos\{n(\theta-\beta)\}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi R\varepsilon_0}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n\cos n\theta\cos n\beta + b^n\sin n\theta\sin n\beta}{R^n}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi R\varepsilon_0}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n\cos n\theta + q_n\sin n\theta}{R^n}\right)$$

n次余弦モーメント　n次正弦モーメント

n次モーメントによる電場はRのn乗に逆比例

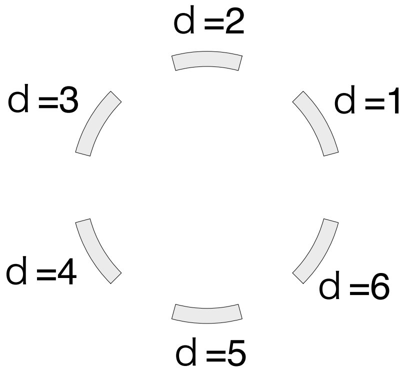
③n次絶対モーメントの寄与と実効開口半径

・単粒子では無く、M粒子系の場合は各粒子が発生させる電場を重ね合わせる

$$E_r(R,\theta) = \frac{M\lambda}{2\pi R\varepsilon_0}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} p_{Nn}\cos n\theta + \frac{1}{M}\sum_{N=1}^{M} q_{Nn}\sin n\theta}{R^n}\right)$$

$$= \frac{\Lambda}{2\pi R\varepsilon_0}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n\cos n\theta + Q_n\sin n\theta}{R^n}\right)$$

この電極配置の場合



電極見込み角30°

R=16 [mm]

・各電極出力 V_d は電場の表面積分に比例する

$$V_d \propto \int_{\frac{(4d-3)\pi}{12}}^{\frac{(4d-1)\pi}{12}} E_r(R,\theta)R\,d\theta = \frac{\Lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\frac{(4d-3)\pi}{12}}^{\frac{(4d-1)\pi}{12}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n\cos n\theta + Q_n\sin n\theta}{R^n}\right)d\theta$$

$$V_d \propto \frac{\pi}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(P_n\boxed{\frac{\int_{\frac{(4d-3)\pi}{12}}^{\frac{(4d-1)\pi}{12}}\cos n\theta\,d\theta}{R^n}} + Q_n\boxed{\frac{\int_{\frac{(4d-3)\pi}{12}}^{\frac{(4d-1)\pi}{12}}\sin n\theta\,d\theta}{R^n}}\right) = \frac{\pi}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\boxed{\frac{c_{dn}}{R^n}}P_n + \boxed{\frac{s_{dn}}{R^n}}Q_n\right)$$

幾何学的因子

③n次絶対モーメントの寄与と実効開口半径

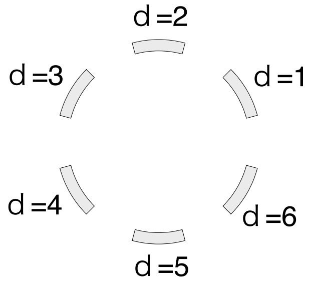
・V_d を具体的に計算すると

$$V_1 \propto \frac{\pi}{12} + \frac{0.45}{R}P_1 + \frac{0.26}{R}Q_1 + \frac{0.25}{R^2}P_2 + \frac{0.43}{R^2}Q_2 + \frac{0}{R^3}P_3 + \frac{0.47}{R^3}Q_3 - \frac{0.22}{R^4}P_4 + \frac{0.38}{R^4}Q_4 + \cdots$$

$$V_3 \propto \frac{\pi}{12} - \frac{0.45}{R}P_1 + \frac{0.26}{R}Q_1 + \frac{0.25}{R^2}P_2 - \frac{0.43}{R^2}Q_2 + \frac{0}{R^3}P_3 + \frac{0.47}{R^3}Q_3 - \frac{0.22}{R^4}P_4 - \frac{0.38}{R^4}Q_4 + \cdots$$

$$V_4 \propto \frac{\pi}{12} - \frac{0.45}{R}P_1 - \frac{0.26}{R}Q_1 + \frac{0.25}{R^2}P_2 + \frac{0.43}{R^2}Q_2 + \frac{0}{R^3}P_3 - \frac{0.47}{R^3}Q_3 - \frac{0.22}{R^4}P_4 + \frac{0.38}{R^4}Q_4 + \cdots$$

$$V_6 \propto \frac{\pi}{12} + \frac{0.45}{R}P_1 - \frac{0.26}{R}Q_1 + \frac{0.25}{R^2}P_2 - \frac{0.43}{R^2}Q_2 + \frac{0}{R^3}P_3 - \frac{0.47}{R^3}Q_3 - \frac{0.22}{R^4}P_4 - \frac{0.38}{R^4}Q_4 + \cdots$$



f_1 h_1 f_2 h_2 h_3 f_4 h_4

$$V_1 \propto \frac{\pi}{12} + \frac{f_1}{R}P_1 + \frac{h_1}{R}Q_1 + \frac{f_2}{R^2}P_2 + \frac{h_2}{R^2}Q_2 + \frac{0}{R^3}P_3 + \frac{h_3}{R^3}Q_3 - \frac{f_4}{R^4}P_4 + \frac{h_4}{R^4}Q_4 + \cdots$$

$$V_3 \propto \frac{\pi}{12} - \frac{f_1}{R}P_1 + \frac{h_1}{R}Q_1 + \frac{f_2}{R^2}P_2 - \frac{h_2}{R^2}Q_2 + \frac{0}{R^3}P_3 + \frac{h_3}{R^3}Q_3 - \frac{f_4}{R^4}P_4 - \frac{h_4}{R^4}Q_4 + \cdots$$

$$V_4 \propto \frac{\pi}{12} - \frac{f_1}{R}P_1 - \frac{h_1}{R}Q_1 + \frac{f_2}{R^2}P_2 + \frac{h_2}{R^2}Q_2 + \frac{0}{R^3}P_3 - \frac{h_3}{R^3}Q_3 - \frac{f_4}{R^4}P_4 + \frac{h_4}{R^4}Q_4 + \cdots$$

$$V_6 \propto \frac{\pi}{12} + \frac{f_1}{R}P_1 - \frac{h_1}{R}Q_1 + \frac{f_2}{R^2}P_2 - \frac{h_2}{R^2}Q_2 + \frac{0}{R^3}P_3 - \frac{h_3}{R^3}Q_3 - \frac{f_4}{R^4}P_4 - \frac{h_4}{R^4}Q_4 + \cdots$$

③n次絶対モーメントの寄与と実効開口半径

・ここで、信号電圧差分を取ると

$$C_1 = \frac{V_1 - V_3 - V_4 + V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6} = \frac{\frac{4f_1}{R}P_1 - \frac{4f_5}{R^5}P_5 + \cdots}{\frac{4\pi}{12} + \frac{4f_2}{R^2}P_2 - \frac{4f_4}{R^4}P_4 + \cdots} = \frac{\frac{12f_1}{\pi R}P_1 - \frac{12f_5}{\pi R^5}P_5 + \cdots}{1 + \frac{12f_2}{\pi R^2}P_2 - \frac{12f_4}{\pi R^4}P_4 + \cdots} = \frac{\frac{2P_1}{R_{C1P1u}} - \frac{2P_5}{R^5_{C1P5u}} + \cdots}{1 + \frac{2P_2}{R^2_{C1P2d}} - \frac{2P_4}{R^4_{C1P4d}} + \cdots}$$

$$S_2 = \frac{V_1 - V_3 + V_4 - V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6} = \frac{\frac{4h_2}{R^2}Q_2 + \frac{4h_4}{R^4}Q_4 + \cdots}{\frac{4\pi}{12} + \frac{4f_2}{R^2}P_2 - \frac{4f_4}{R^4}P_4 + \cdots} = \frac{\frac{12h_2}{\pi R^2}Q_2 + \frac{12h_4}{\pi R^4}Q_4 + \cdots}{1 + \frac{12f_2}{\pi R^2}P_2 - \frac{12f_4}{\pi R^4}P_4 + \cdots} = \frac{\frac{2Q_2}{R^2_{S2Q2u}} + \frac{2Q_4}{R^4_{S2Q4u}} + \cdots}{1 + \frac{2P_2}{R^2_{S2P2d}} - \frac{2P_4}{R^4_{S2P4d}} + \cdots}$$

$$R_{C1P1u} = \frac{\pi}{6f_1}R,\ R_{C1P5u} = \sqrt[5]{\frac{\pi}{6f_5}}R,\ R_{C1P2d} = \sqrt{\frac{\pi}{6f_2}}R,\ R_{C1P4d} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{6f_4}}R,$$

$$R_{S2Q2u} = \sqrt{\frac{\pi}{6h_2}}R,\ R_{S2Q4u} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{6h_4}}R,\ R_{S2P2d} = \sqrt{\frac{\pi}{6f_2}}R,\ R_{S2P4d} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{6f_4}}R,$$

R_{C1P1u} 等を実効開口半径と呼ぶ（R≦R_{C1P1u}等）

実効開口半径が小さいほど信号電圧差分への寄与が大きい

nの次数が小さいほど信号電圧差分への寄与が大きい

実効開口半径の大きさ [mm]

R_{C1P1u}	18.69	R_{S2Q2u}	17.59
R_{C1P5u}	17.50	R_{S2Q4u}	17.39
R_{C1P2d}	23.16	R_{S2P2d}	23.16
R_{C1P4d}	19.95	R_{S2P4d}	19.95

④静電ストリップライン型ビーム位置モニタ（BPM）の開発

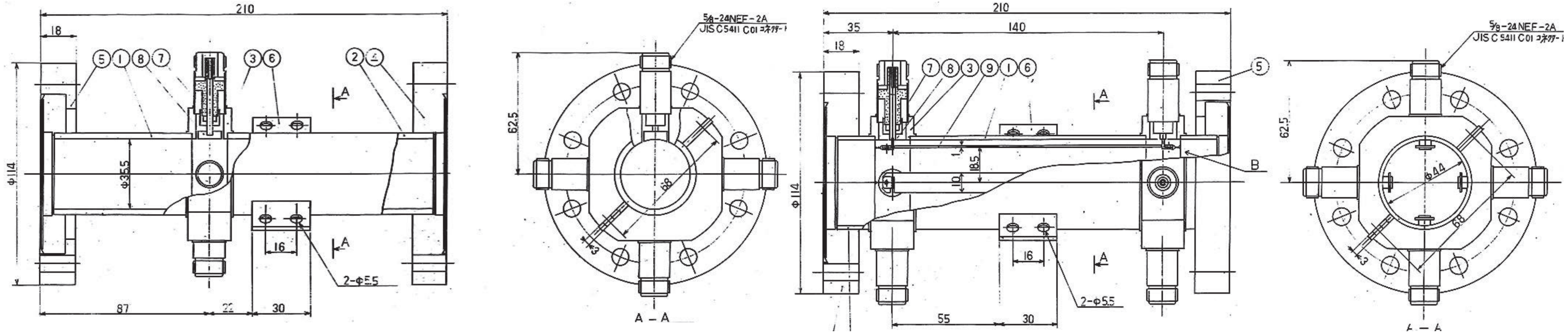
・SPring-8線型加速器の運転開始は1996年

・当初、運転開始時からBPMを運用をする予定が、開発の遅れと予算関係で断念

　→ボタン型は出力が小さすぎ＆波形が非対称➡ストリップライン型を決定

　→ストリップライン型は形状とストリップライン長の最適化が終わらず

　　そのため、信号処理回路のブロックダイアグラムも固まらず



1991年に試験したボタン型及びストリップライン型BPM（東海研電子リニヤックで実験）

ストリップライン型は電場及び磁場による結合を考える必要あり

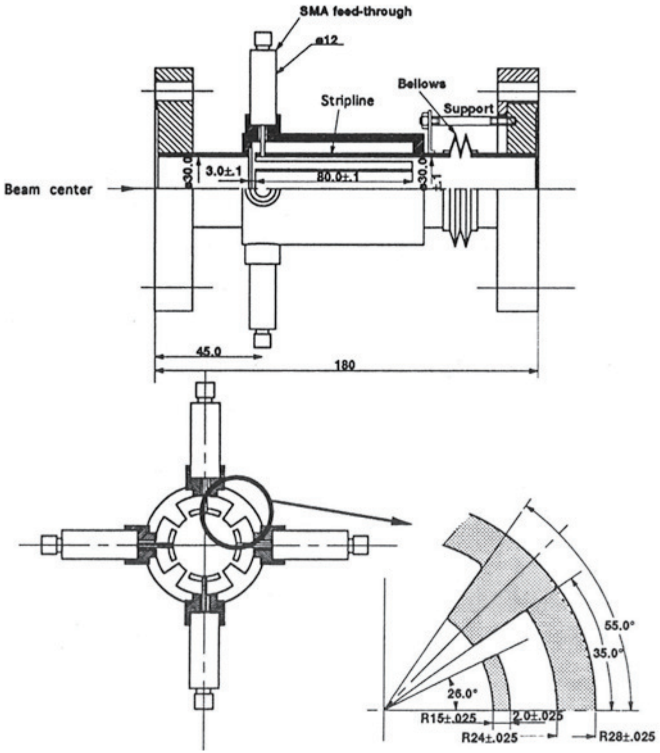
→磁場のみ結合のピックアップを試作するもインピーダンスが整合しない

→SPring-8の建設・コミッショニング＆ニュースバルBT系の建設等で1998年まで放置

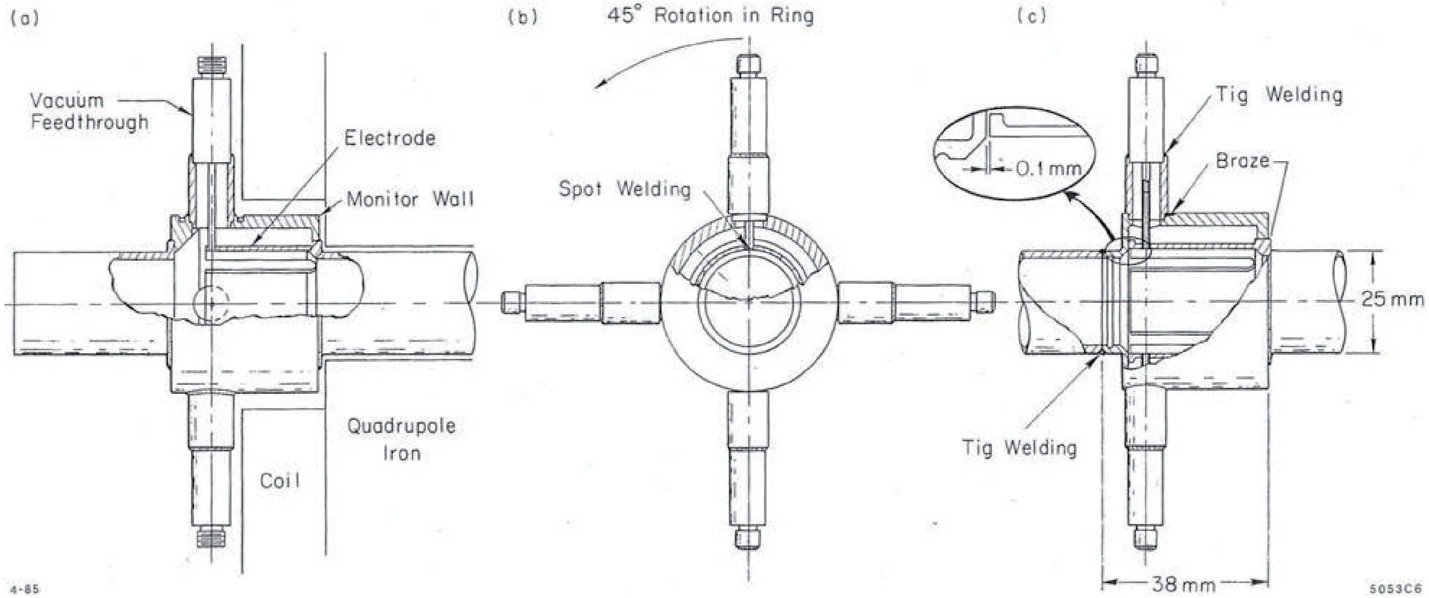
④静電ストリップライン型ビーム位置モニタ（BPM）の開発

1998年頃、静電結合のみのストリップライン型BPMを設計しようとしたが、

既にATFで同タイプのものが運用されているのを知る。元は恐らくSLACで開発されたもの。



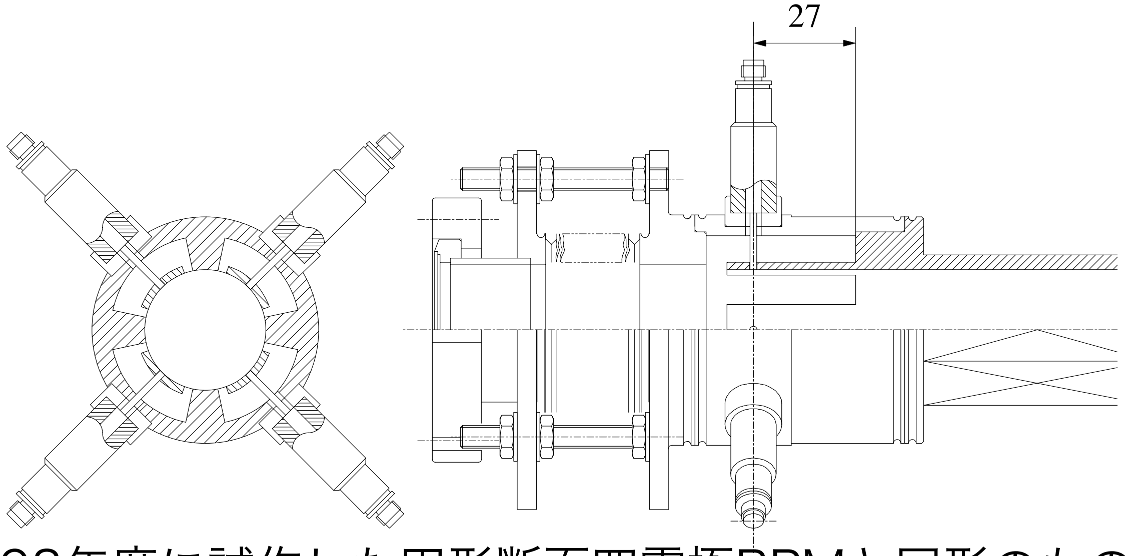
柏木茂、早野仁司、"ATFリニアック用
ストリップライン型位置モニターの較正"、
第20回リニアック技術研究会Proc.、
大阪、1995年9月、pp. 233-235.より



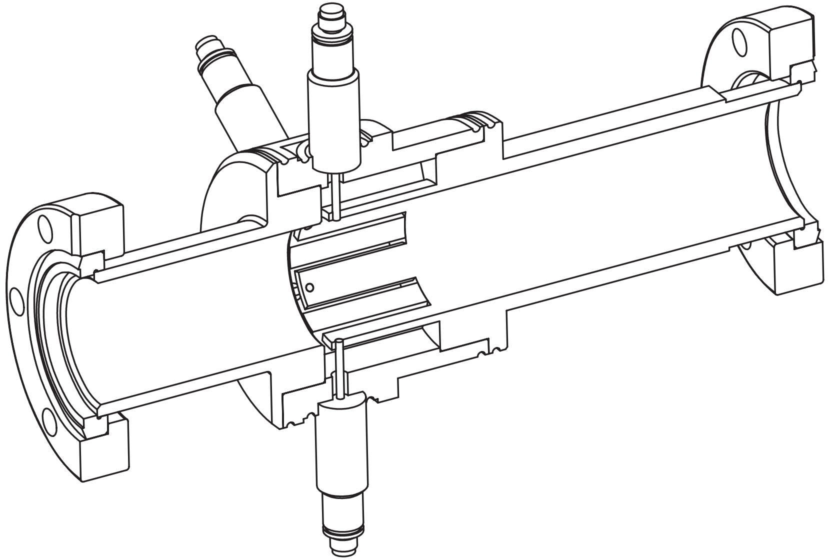
J. Denard *et al*., “Parasitic Mode Losses Versus Signal Sensitivity in Beam Position Monitors”, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-32 5, 1985, pp. 2000-2002.より

早野氏から貰った資料を基に四電極BPMを設計・製作した。

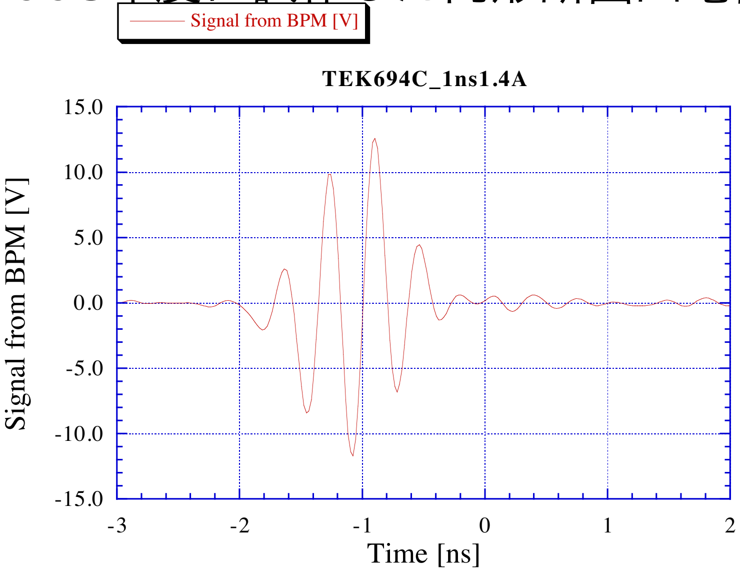
④静電ストリップライン型ビーム位置モニタ（BPM）の開発



1998年度に試作した円形断面四電極BPMと同形のもの



2010年度に試作した円形断面六電極BPM



1999年1月に取得された波形（約3バンチ）

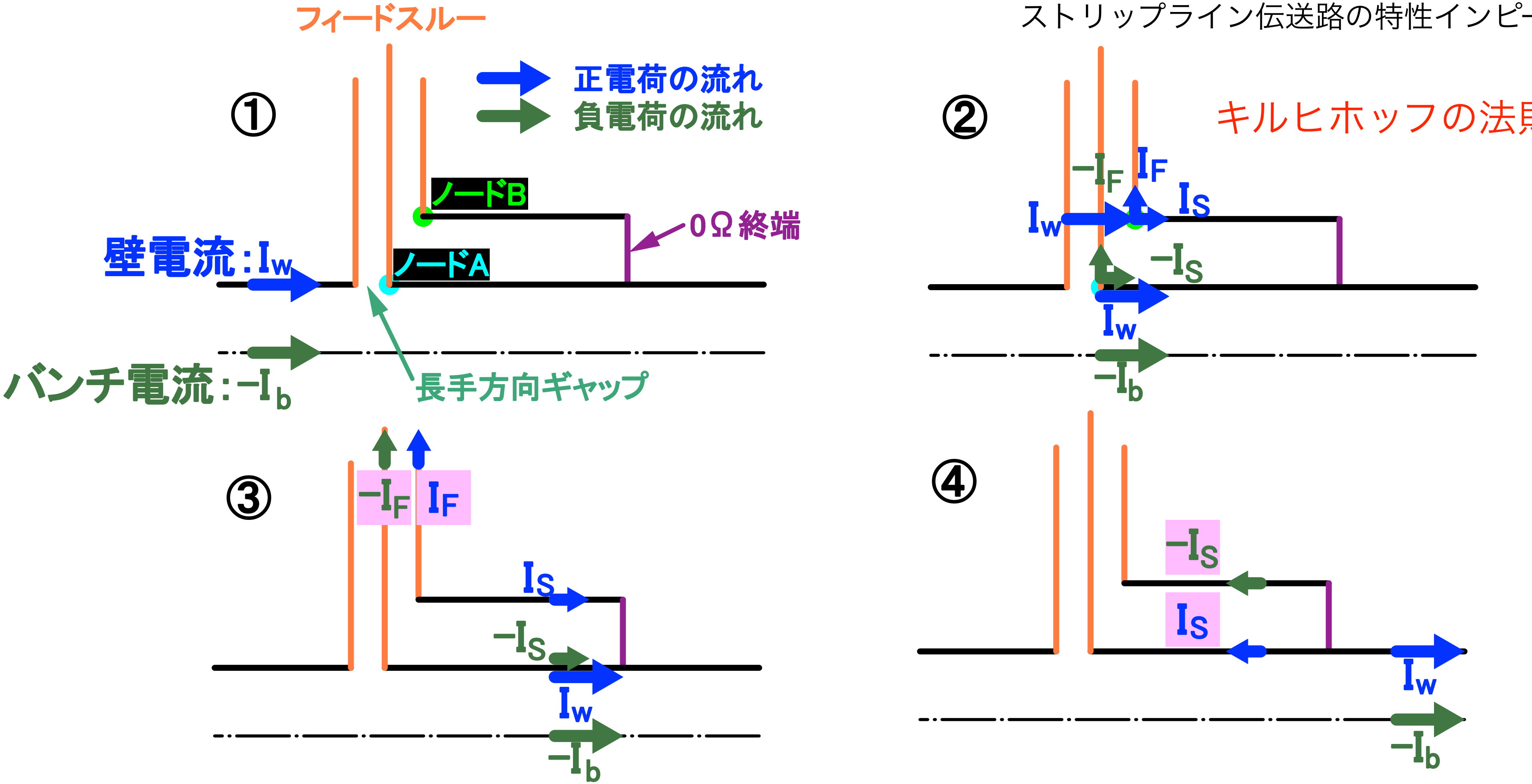
オシロスコープの帯域は3GHz

この波形を確認後、信号処理回路の開発開始

何故このような波形と電圧になるのか？

④静電ストリップライン型ビーム位置モニタ（BPM）の開発

ストリップライン伝送路の特性インピーダンスは50Ω



ミクロバンチ電流波形そのままが出力される

出力電圧[V]は壁電流[A]と特性インピーダンス[Ω]に比例する（オームの法則）。

⑤信号処理回路のノイズレベルと測定分解能

BPF Module　Detector Module　Detector Module　BPF Module

2000年度に開発した四回路信号処理回路

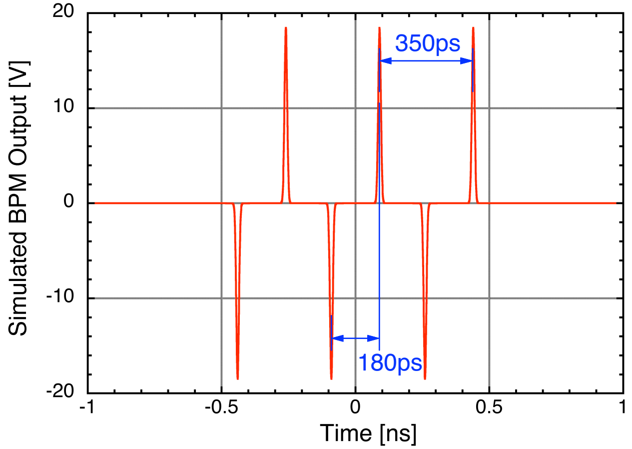
BPF Module　Detector Module　Detector Module　BPF Module

2010年度に開発した六回路信号処理回路

基本的な信号処理の流れは同じ。BPFで信号（RF）を加工し検波する。

⑤信号処理回路のノイズレベルと測定分解能

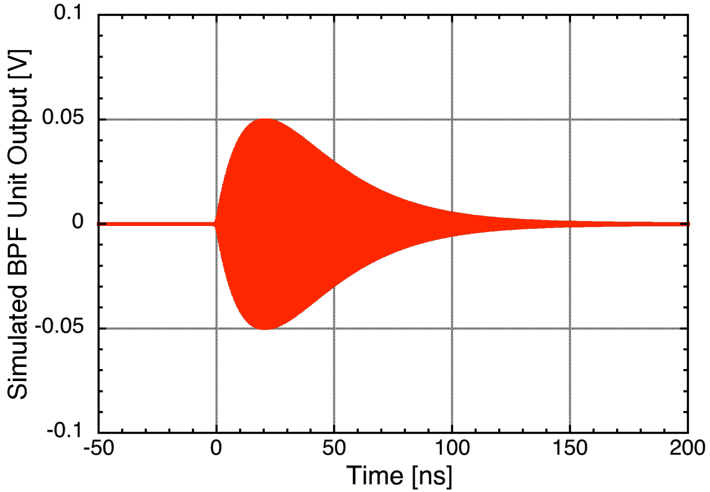
・BPFによる信号の加工（シミュレーション）



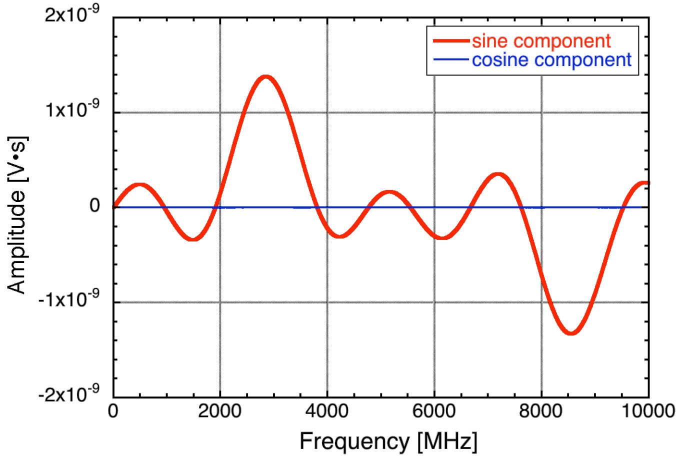
BPM電極出力波形

フーリエ変換

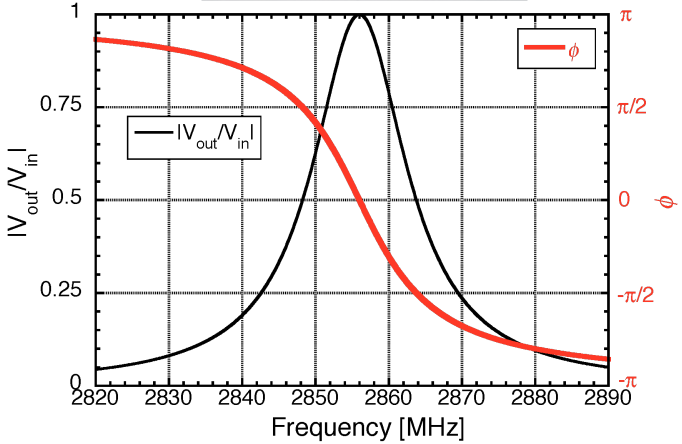
フーリエ逆変換



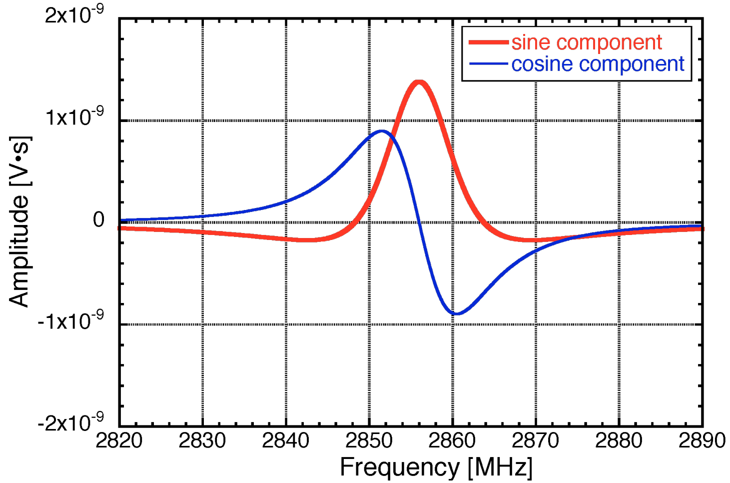
BPF通過後の波形



BPM電極出力スペクトル



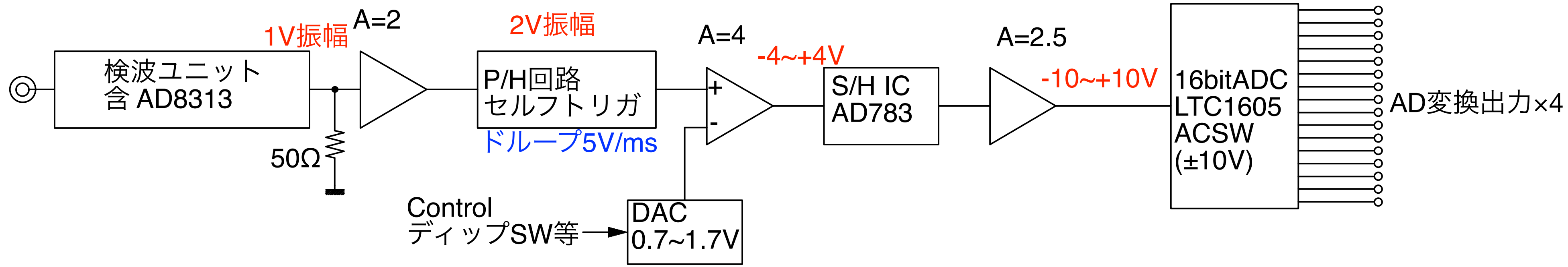
BPF信号加工関数



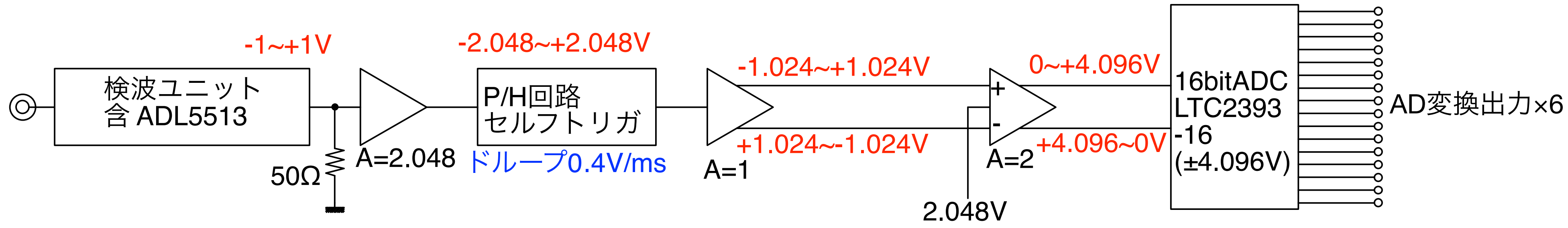
BPF通過後のスペクトル

⑤信号処理回路のノイズレベルと測定分解能

・検波モジュールのブロックダイアグラム



2000年度に開発した四回路信号処理回路

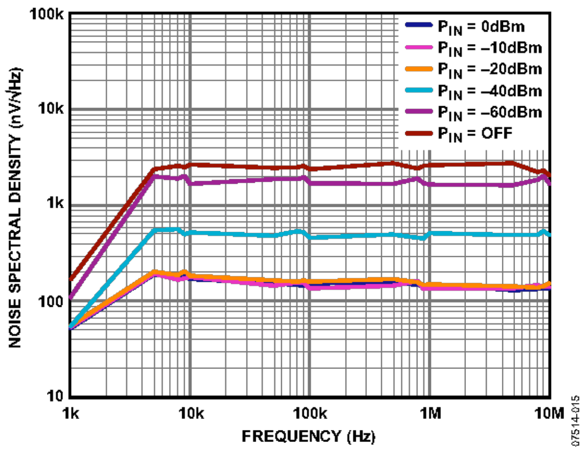


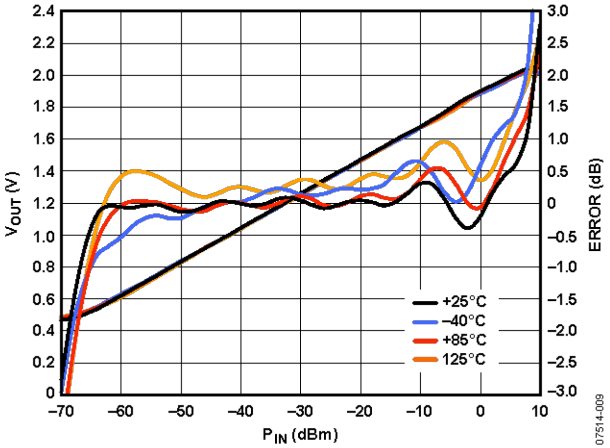
2010年度に開発した六回路信号処理回路

繰り返し：1kHz→100Hz

S/H IC（AD783）不使用によりノイズが半減する予定であった

⑤信号処理回路のノイズレベルと測定分解能





ADL5513データシートより

検波ユニット出力パルス幅100ns

→Frequency:10MHz

ADCのサンプリングタイムから、

帯域幅1MHz程度と想定

スロープは0.02V/dBm

150E-9 [V/√Hz]・1E3 [√Hz] / 0.02 [V/dB] = 0.008dB⇒0.1%のエラー（各電極分）

$$P_1 \approx \frac{R_{C1P1u}}{2} C_1 = \frac{R_{C1P1u}}{2} \frac{V_1 - V_3 - V_4 + V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6}$$

$$Q_2 \approx \frac{R_{S2Q2u}^2}{2} S_2 = \frac{R_{S2Q2u}^2}{2} \frac{V_1 - V_3 + V_4 - V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6}$$

$$\Delta P_1 \approx \frac{R_{C1P1u}}{2} \Delta C_1 = \frac{R_{C1P1u}}{2} \left(\frac{\partial C_1}{\partial V_1} \Delta V_1 + \frac{\partial C_1}{\partial V_3} \Delta V_3 + \frac{\partial C_1}{\partial V_4} \Delta V_4 + \frac{\partial C_1}{\partial V_6} \Delta V_6 \right)$$

$$\Delta Q_2 \approx \frac{R_{S2Q2u}^2}{2} \Delta S_2 = \frac{R_{S2Q2u}^2}{2} \left(\frac{\partial C_1}{\partial V_1} \Delta V_1 + \frac{\partial C_1}{\partial V_3} \Delta V_3 + \frac{\partial C_1}{\partial V_4} \Delta V_4 + \frac{\partial C_1}{\partial V_6} \Delta V_6 \right)$$

⑤信号処理回路のノイズレベルと測定分解能

$V \approx V_1 \approx V_3 \approx V_4 \approx V_6, \Delta V \approx \Delta V_1 \approx \Delta V_3 \approx \Delta V_4 \approx \Delta V_6$ を想定し、統計的処理を行うと；

$$\Delta P_1 \approx \frac{R_{C1P1u}}{2} \frac{1}{2} \frac{\Delta V}{V} \qquad \Delta Q_2 \approx \frac{R_{S2Q2u}^2}{2} \frac{1}{2} \frac{\Delta V}{V}$$

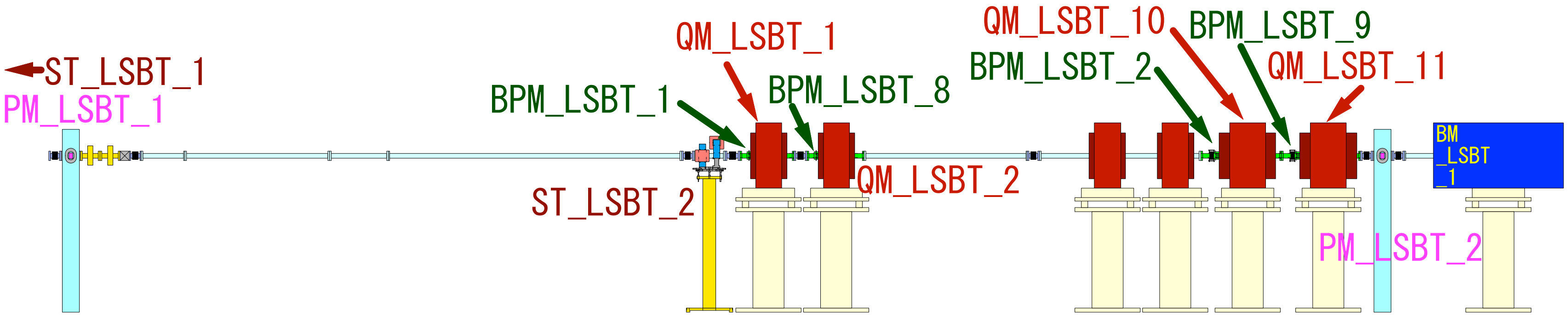
$R_{C1P1u} = 18.69\,[mm], R_{S2Q2u} = 17.59\,[mm], \dfrac{\Delta V}{V} \approx 0.001$ を上式に代入すると；

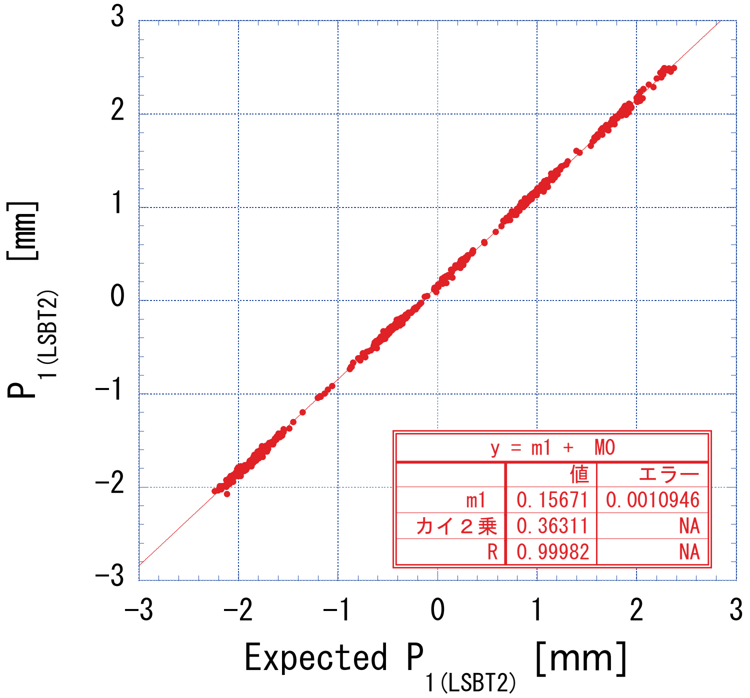
$$\Delta P_1 \approx 0.005\,[mm], \Delta Q_2 \approx 0.077\,[mm^2]$$

が得られる。これが、Log検波ICのノイズレベルによる測定分解能である。

⑤信号処理回路のノイズレベルと測定分解能

・BPM_LSBT_8とBPM_LSBT_9からBPM_LSBT_2の値を予測





$$Expected \sim P_{1(LSBT2)} = \frac{(0.62P_{1(LSBT8)} + 3.064P_{1(LSBT9)})}{(3.064 + 0.62)}$$

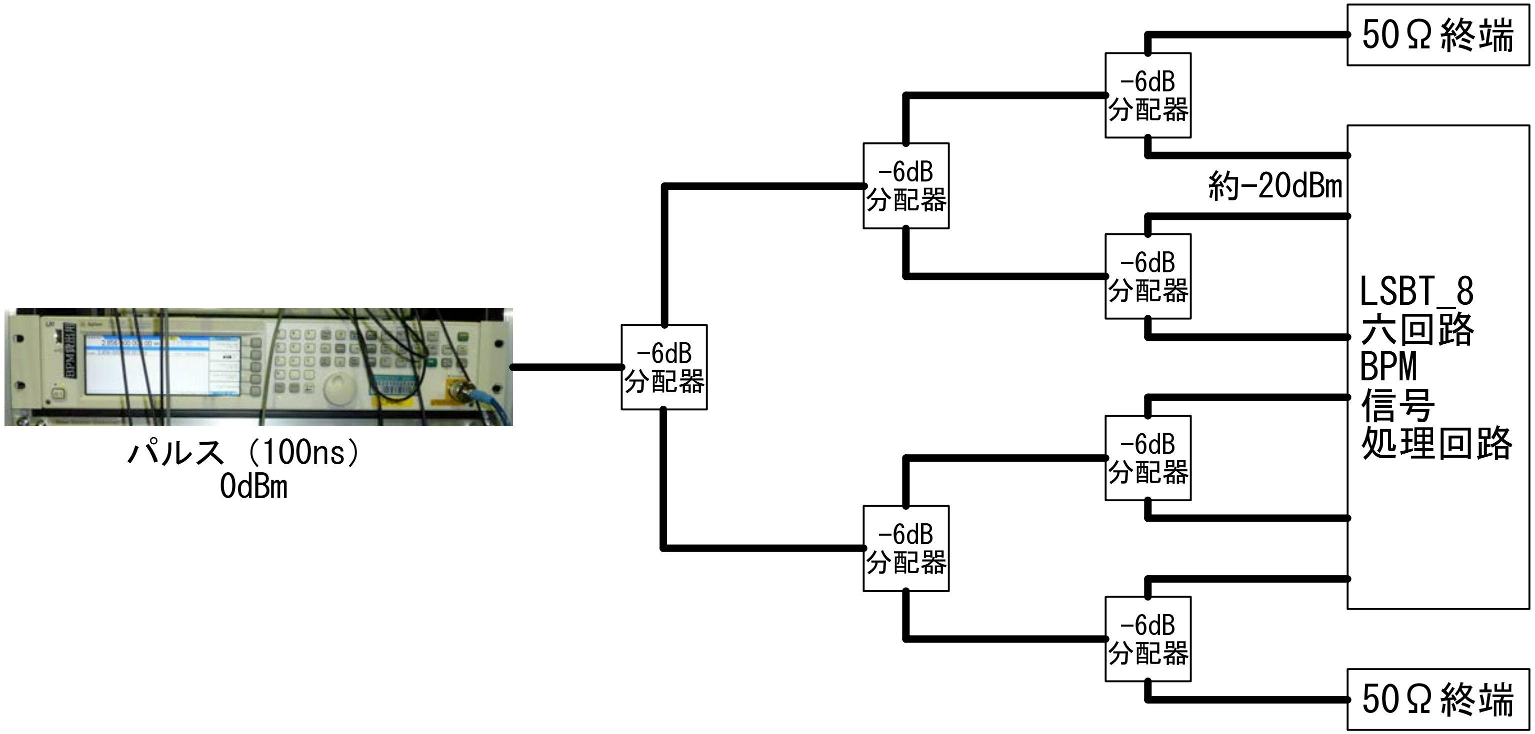
予想されるビーム位置と測定されるビーム位置の差分が信号処理回路による分解能

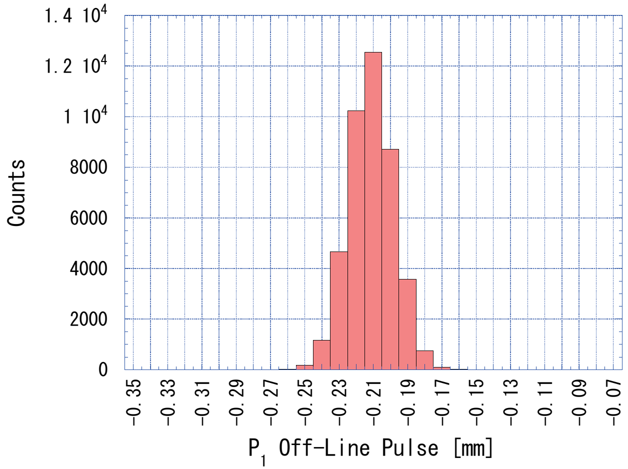
$$\Delta P_1 \approx 0.015\,[mm]$$

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 0.003\,?$$

⑤信号処理回路のノイズレベルと測定分解能

・発振器N5181A（アジレント）を使用して、オフライン試験を行った





$\Delta P_1 \approx 0.013\,[mm]$

$\dfrac{\Delta V}{V} \approx 0.0028\,?$

	設計	オフライン試験	ビーム試験
$\dfrac{\Delta V}{V}$	0.001	0.0028	0.003
$\Delta P_1\,[mm]$	0.005	0.013	0.015
$\Delta Q_2\,[mm^2]$	0.077	0.217	0.232

⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正

・ケーブル・アンプ等全てのエレメントの減衰率や増幅率を足して較正しても正しく較正されてなく、機械中心と電気中心が一致しない➡ビームベースドの較正
・ステアリング電磁石でビーム位置を変化させても、相対モーメントは変化しない
相対モーメントが変化しない相対減衰率が演繹される（得られる）
これを**全体較正**と呼んでいる
・円形断面六電極BPMではQ_1は二通りの計算方法（定義）

$$Q_1 \approx \frac{R_{S1Q1u}}{2} S_1 = \frac{R_{S1Q1u}}{2} \frac{V_1 + V_3 - V_4 - V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6}, \quad Q_1 \approx \frac{R_{S1^*Q1u}}{2} S_{1^*} = \frac{R_{S1^*Q1u}}{2} \frac{V_2 - V_5}{V_2 + V_5}$$

・本来、二つの定義共に同じ相対減衰率が得られる筈➡異なる相対減衰率が得られた
・プログラムで両方満たすようにすると、計算が発散（いつまでたっても収束しない）

$$S_1 = \frac{\dfrac{2Q_1}{R_{S1Q1u}} + \dfrac{2Q_3}{R^3_{S1Q3u}} + \dfrac{2Q_5}{R^5_{S1Q5u}} + \cdots}{1 + \dfrac{2P_2}{R^2_{S1P2d}} - \dfrac{2P_4}{R^4_{S1P4d}} + \cdots}$$

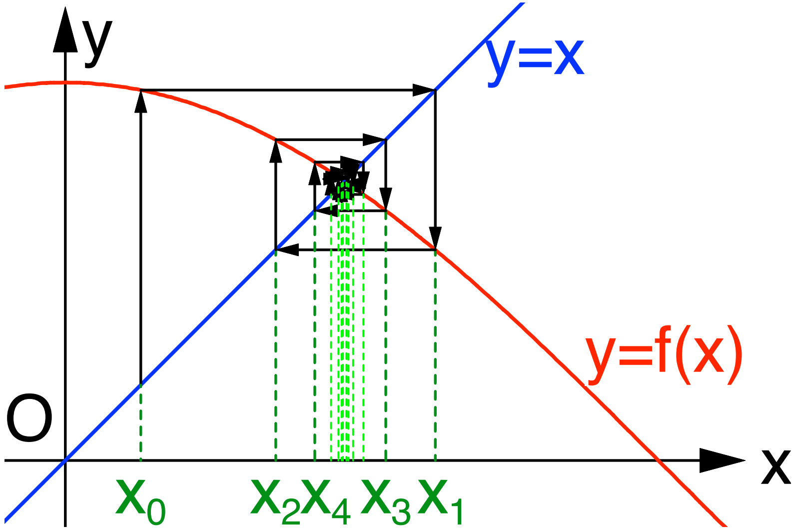
$$S_{1^*} = \frac{\dfrac{2Q_1}{R_{S1^*Q1u}} - \dfrac{2Q_3}{R^3_{S1^*Q3u}} + \dfrac{2Q_5}{R^5_{S1^*Q5u}} + \cdots}{1 - \dfrac{2P_2}{R^2_{S1^*P2d}} + \dfrac{2P_4}{R^4_{S1^*P4d}} + \cdots}$$

・よく調べると、S_1及びS_{1^*}への各モーメント寄与のうち
P_2、Q_3及びP_4等の符号が逆（寄与が逆）

・各信号電圧差分C_1、S_1、C_2、S_2及び与Q_3へ
五次モーメントまでの寄与を繰り込んで
位置等を計算すると正しい相対減衰率が得られた

⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正

・如何にして五次モーメントまでの寄与を繰り込んで位置等の計算を実行するか？
一変数（例えばx）の場合、$x=f(x)$で表される時、興味のある領域で滑らか且つ単調且つ$|df(x)/dx|<1$を満たす場合、適当な初期値をx_0を選び、
$x_1=f(x_0)\rightarrow x_2=f(x_1)\rightarrow x_3=f(x_2)\rightarrow x_4=f(x_3)\rightarrow x_5=f(x_4)\rightarrow\cdots\rightarrow x_{i+1}=f(x_i)\rightarrow\cdots$
と逐次代入していくと、**iが十分大きな時**に$x_i \approx x_{i+1}=f(x_i)$となる



x=cos xに於ける逐次代入を行い解を得る例

⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正

・五変数の場合はどうする？

$$C_1 = \frac{\dfrac{2P_1}{R_{C1P1u}} - \dfrac{2P_5}{R^5_{C1P5u}} + \cdots}{1 + \dfrac{2P_2}{R^2_{C1P2d}} - \dfrac{2P_4}{R^4_{C1P4d}} + \cdots},\ S_1 = \frac{\dfrac{2Q_1}{R_{S1Q1u}} + \dfrac{2Q_3}{R^3_{S1Q3u}} + \dfrac{2Q_5}{R^5_{S1Q5u}} + \cdots}{1 + \dfrac{2P_2}{R^2_{S1P2d}} - \dfrac{2P_4}{R^4_{S1P4d}} + \cdots}$$

$$C_2 = \frac{\dfrac{2P_2}{R^2_{C2P2u}} - \dfrac{2P_4}{R^4_{C2P4u}} + \cdots}{1 - \dfrac{2P_2}{R^2_{C2P2d}} + \dfrac{2P_4}{R^4_{C2P4d}} + \cdots},\ S_2 = \frac{\dfrac{2Q_2}{R^2_{S2Q2u}} + \dfrac{2Q_4}{R^4_{S2Q4u}} + \cdots}{1 + \dfrac{2P_2}{R^2_{S2P2d}} - \dfrac{2P_4}{R^4_{S2P4d}} + \cdots},\ S_3 = \frac{\dfrac{2Q_3}{R^2_{S3Q3u}} + \cdots}{1 + \cdots}$$

$$C_1 = \frac{V_1 - V_3 - V_4 + V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6},\ S_1 = \frac{V_1 + V_3 - V_4 - V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6},\ C_2 = \frac{V_1 + V_3 + V_4 + V_6 - 2(V_2 + V_5)}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6 + 2(V_2 + V_5)}$$

$$S_2 = \frac{V_1 - V_3 + V_4 - V_6}{V_1 + V_3 + V_4 + V_6},\ S_3 = \frac{V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + V_5 - V_6}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6},$$

$\cdots$は六次以上

ここで、P_3, P_4, Q_4, P_5, Q_5 は六電極BPMでは測定出来ない！！

●測定出来ないならば P_3, P_4, Q_4, P_5, Q_5 は零なのか？→違う

●では何を零と見做すべきか？

⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正

$\boxtimes$ は測定出来ない相対モーメント⇒零とおく

$$P_1 = p_{G1}$$
$$Q_1 = q_{G1}$$
$$P_2 = p_{G2} + P_{g2}$$
$$Q_2 = q_{G2} + Q_{g2}$$
$$P_3 = p_{G3} + 3p_{G1}P_{g2} - 3q_{G1}Q_{g2} + \cancel{P_{g3}}$$
$$Q_3 = q_{G3} + 3q_{G1}P_{g2} + 3p_{G1}Q_{g2} + Q_{g3}$$
$$P_4 = p_{G4} + 6p_{G2}P_{g2} - 6q_{G2}Q_{g2} + 4p_{G1}\cancel{P_{g3}} - 4q_{G1}Q_{g3} + \cancel{P_{g4}}$$
$$Q_4 = q_{G4} + 6q_{G2}P_{g2} + 6p_{G2}Q_{g2} + 4q_{G1}\cancel{P_{g3}} + 4p_{G1}Q_{g3} + \cancel{Q_{g4}}$$
$$P_5 = p_{G5} + 10p_{G3}P_{g2} - 10q_{G3}Q_{g2} + 10p_{G2}\cancel{P_{g3}} - 10q_{G2}Q_{g3} + 5p_{G1}\cancel{P_{g4}} - 5q_{G1}\cancel{Q_{g4}} + \cancel{P_{g5}}$$
$$Q_5 = q_{G5} + 10q_{G3}P_{g2} + 10p_{G3}Q_{g2} + 10q_{G2}\cancel{P_{g3}} + 10p_{G2}Q_{g3} + 5q_{G1}\cancel{P_{g4}} + 5p_{G1}\cancel{Q_{g4}} + \cancel{Q_{g5}}$$

$$p_{G2} = p_{G1}^2 - q_{G1}^2$$
$$q_{G2} = 2p_{G1}q_{G1}$$
$$p_{G3} = p_{G1}^3 - 3p_{G1}q_{G1}^2$$
$$q_{G3} = 3p_{G1}^2q_{G1} - q_{G1}^3$$
$$p_{G4} = p_{G1}^4 - 6p_{G1}^2q_{G1}^2 + q_{G1}^4$$
$$q_{G4} = 4p_{G1}^3q_{G1} - 4p_{G1}q_{G1}^3$$
$$p_{G5} = p_{G1}^5 - 10p_{G1}^3q_{G1}^2 + 5p_{G1}q_{G1}^4$$
$$q_{G5} = 5p_{G1}^4q_{G1} - 10p_{G1}^2q_{G1}^3 + q_{G1}^5$$

nが2以上の p_{Gn}, q_{Gn} は全て p_{G1}, q_{G1} を使って表される

nが2以上の P_n, Q_n を全て $p_1, q_1, P_{g2}, Q_{g2}, Q_{g3}$ を使用して表現する

$p_1, q_1, P_{g2}, Q_{g2}, Q_{g3}$ 若しくは P_1, Q_1, P_2, Q_2, Q_3 は互いに独立（直交する）なので、

逐次代入を行う際は互いに定数と考えられる➡五つの一次元の変数問題同様として扱える

⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正

p_{G1i}, q_{G1i}, P_{g2i}, Q_{g2i}, Q_{g3i}

P_{1i}, Q_{1i}, P_{2i}, Q_{2i}, P_{3i}, Q_{3i}, P_{4i}, Q_{4i}, P_{5i}, Q_{5i}

$$\frac{2P_{1(i+1)}}{R_{C1P1u}} = C_1\left(1+\frac{2P_{2i}}{R^2_{C1P2d}}-\frac{2P_{4i}}{R^4_{C1P4d}}\right)+\frac{2P_{5i}}{R^5_{C1P5u}}$$

$$\frac{2Q_{1(i+1)}}{R_{S1Q1u}} = S_1\left(1+\frac{2P_{2i}}{R^2_{S1P2d}}-\frac{2P_{4i}}{R^4_{S1P4d}}\right)-\frac{2Q_{3i}}{R^3_{S1Q3u}}-\frac{2Q_{5i}}{R^5_{S1Q5u}}$$

$$\frac{2P_{2(i+1)}}{R^2_{C2P2u}} = C_2\left(1-\frac{2P_{2i}}{R^2_{C2P2d}}+\frac{2P_{4i}}{R^4_{C2P4d}}\right)+\frac{2P_{4i}}{R^4_{C2P4u}}$$

$$\frac{2Q_{2(i+1)}}{R^2_{S2Q2u}} = S_2\left(1+\frac{2P_{2i}}{R^2_{S2P2d}}-\frac{2P_{4i}}{R^4_{S2P4d}}\right)-\frac{2Q_{4i}}{R^4_{S2Q4u}}$$

$$\frac{2Q_{3(i+1)}}{R^2_{S3Q3u}} = S_3$$

$P_{1(i+1)}$, $Q_{1(i+1)}$, $P_{2(i+1)}$, $Q_{2(i+1)}$, $Q_{3(i+1)}$

$p_{G1(i+1)}$, $q_{G1(i+1)}$, $P_{g2(i+1)}$, $Q_{g2(i+1)}$, $Q_{g3(i+1)}$

逐次代入の流れ

このダイアグラムでは五次までの補正とするが、三次まででも七次まででも可

⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正

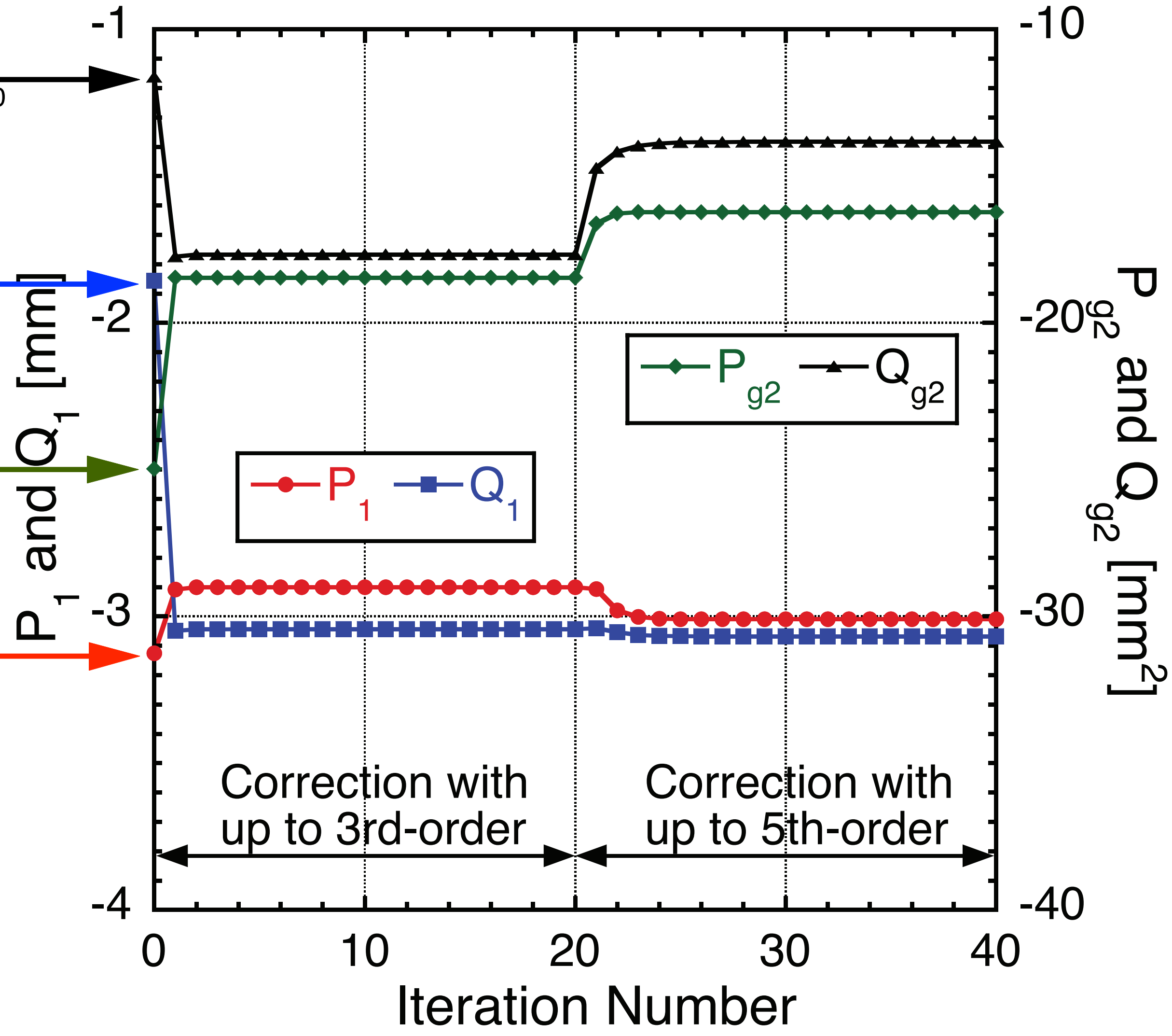
$Q_{20} = \frac{R^2_{S2Q2u} S_2}{2}$ を満たす Q_{g2} の初期値 Q_{g20}

$Q_{10} = \frac{R_{S1Q1u} S_1}{2}$ を満たす $q_{G1} = Q_1$ の初期値 Q_{10}

$P_{20} = \frac{R^2_{C2P2u} C_2}{2}$ を満たす P_{g2} の初期値 P_{g20}

$P_{10} = \frac{R_{C1P1u} C_1}{2}$ を満たす $p_{G1} = P_1$ の初期値 P_{10}

但し、$Q_{g3} \equiv 0$ とした

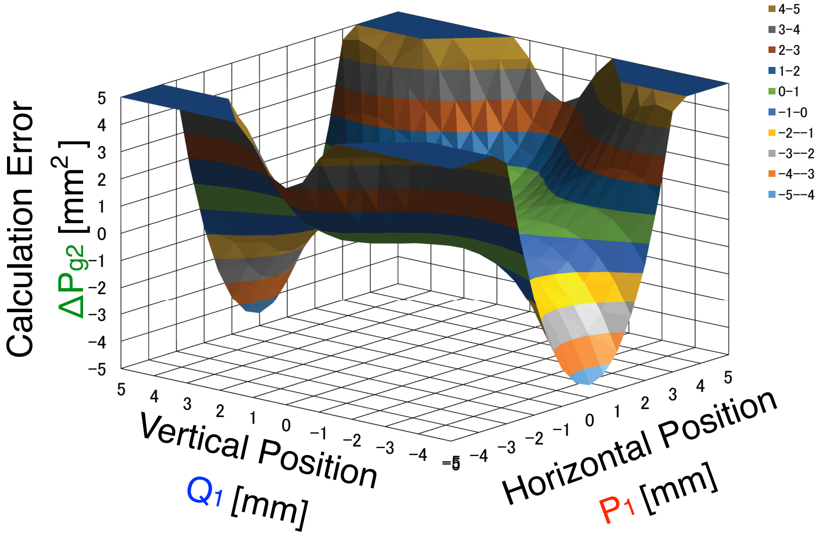


実ビームでの逐次代入計算の（収束の）例

⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正

・高次モーメント補正の有り無しではどの程度の測定誤差が現れるか？（シミュレーション）

補正無し

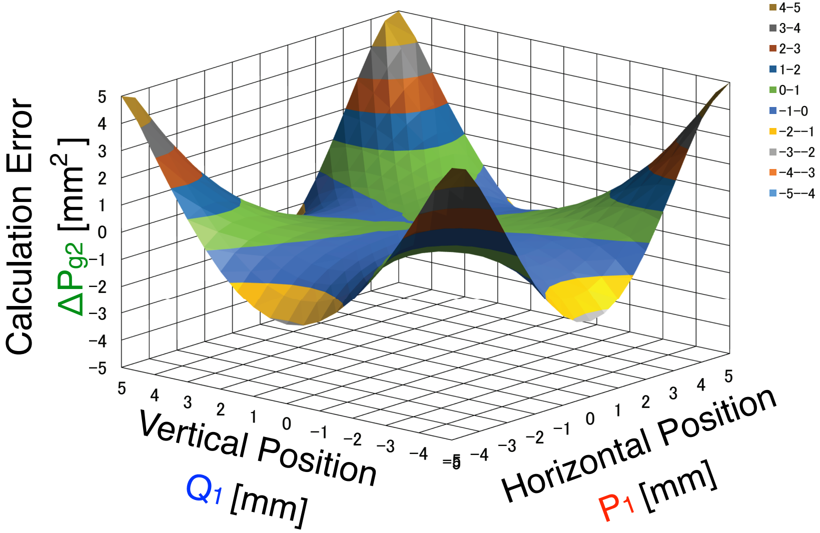


原点の位置が正確で無い場合、

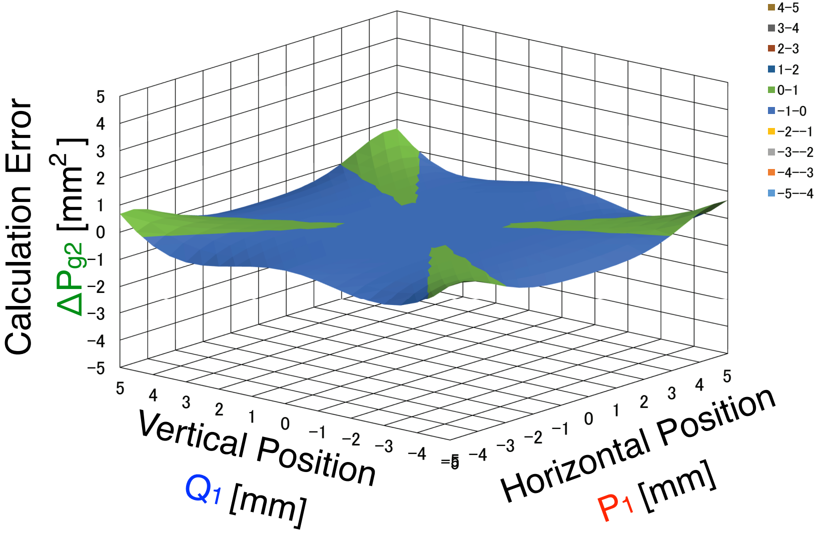
高次相対モーメントの対称性が悪くなる

→10μmの精度で原点を探す必要性あり

三次までの補正



五次までの補正

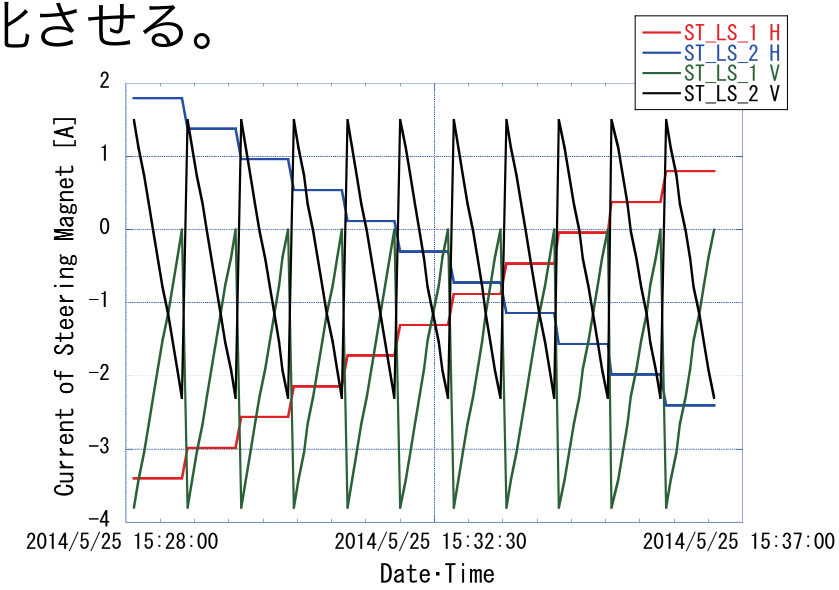


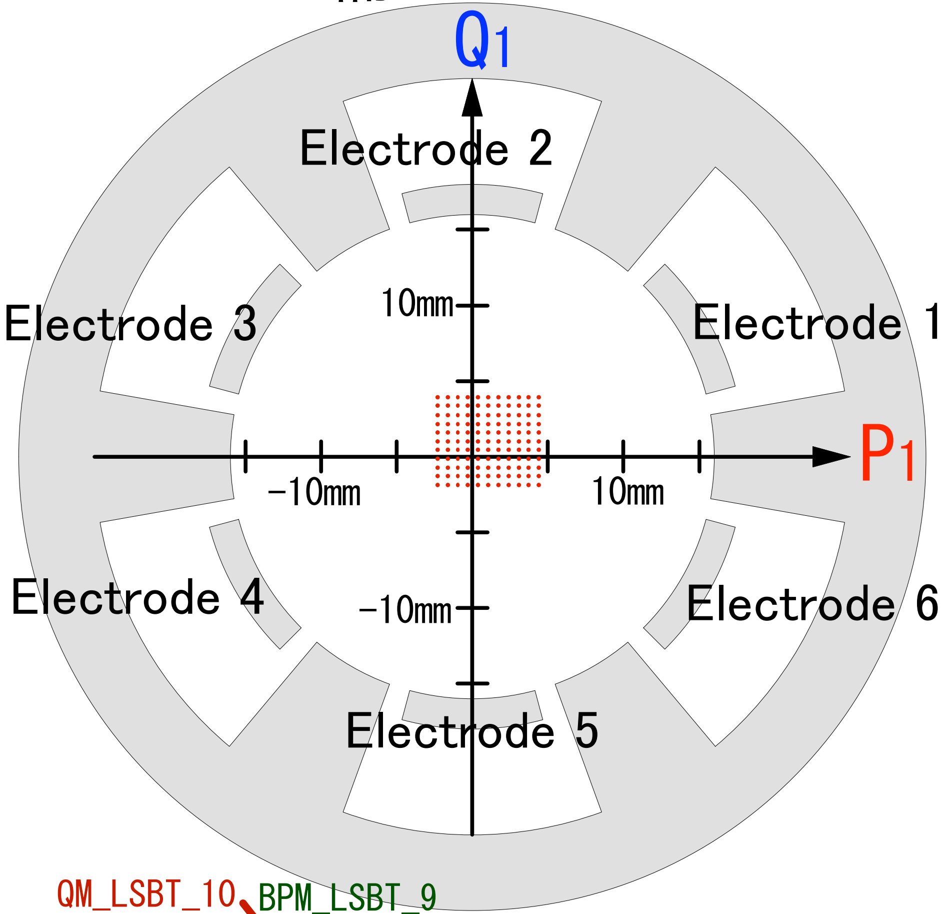
⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正

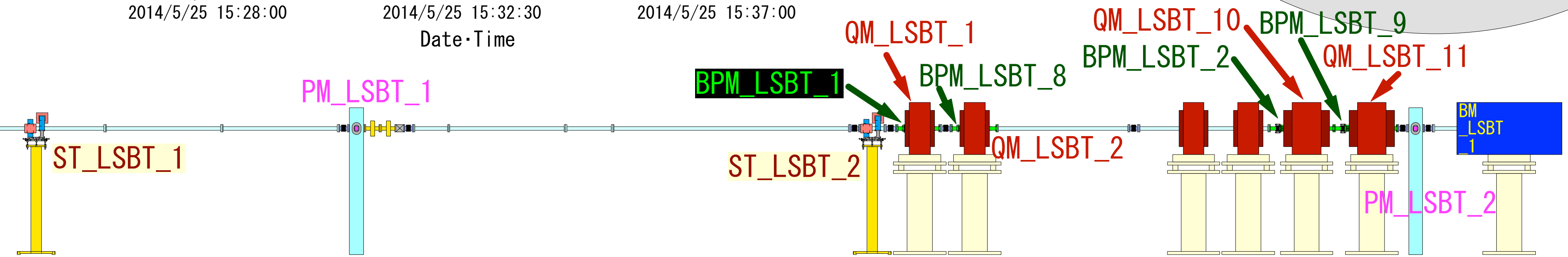
・全体較正

BPM_LSBT_1の全体較正の例

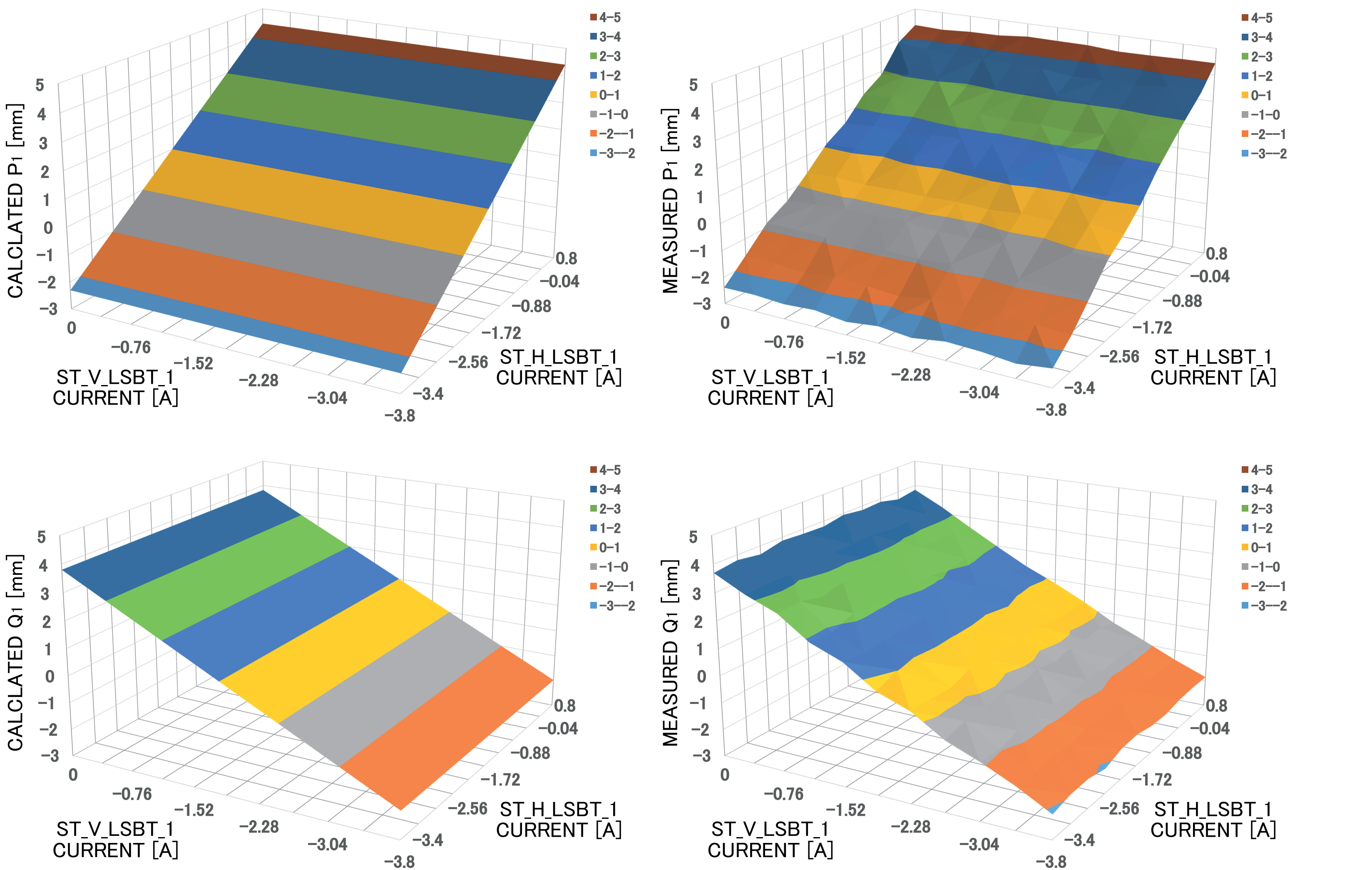
ステアリング電磁石（ST_LSBT_1, ST_LSBT_2）を互いに逆方向に励磁してビーム位置を変化させる。





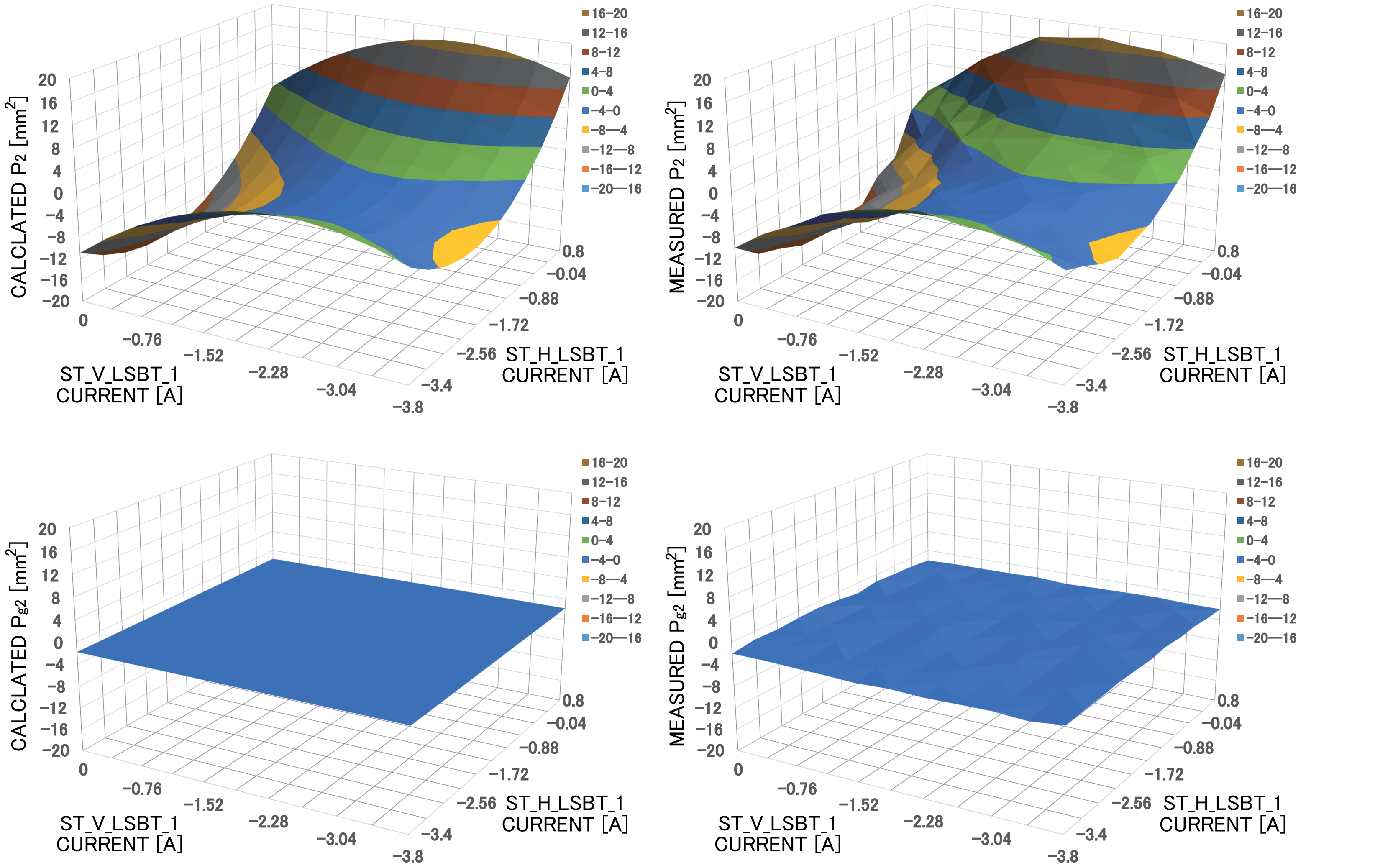


⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正（全体較正の例）



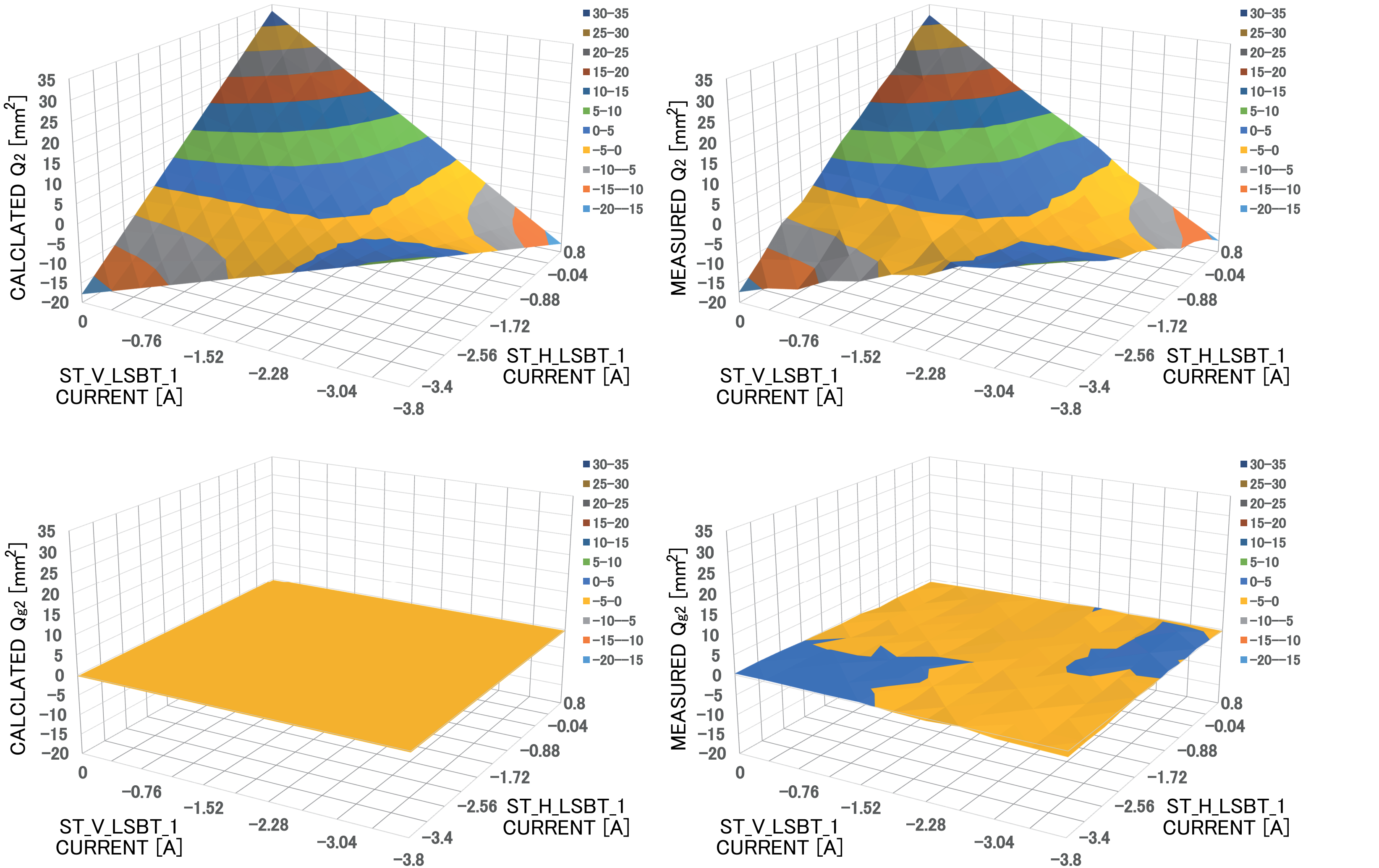
P1（上）及びQ1（下）のシミュレーション（左）と実測値（右）

⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正（全体較正の例）



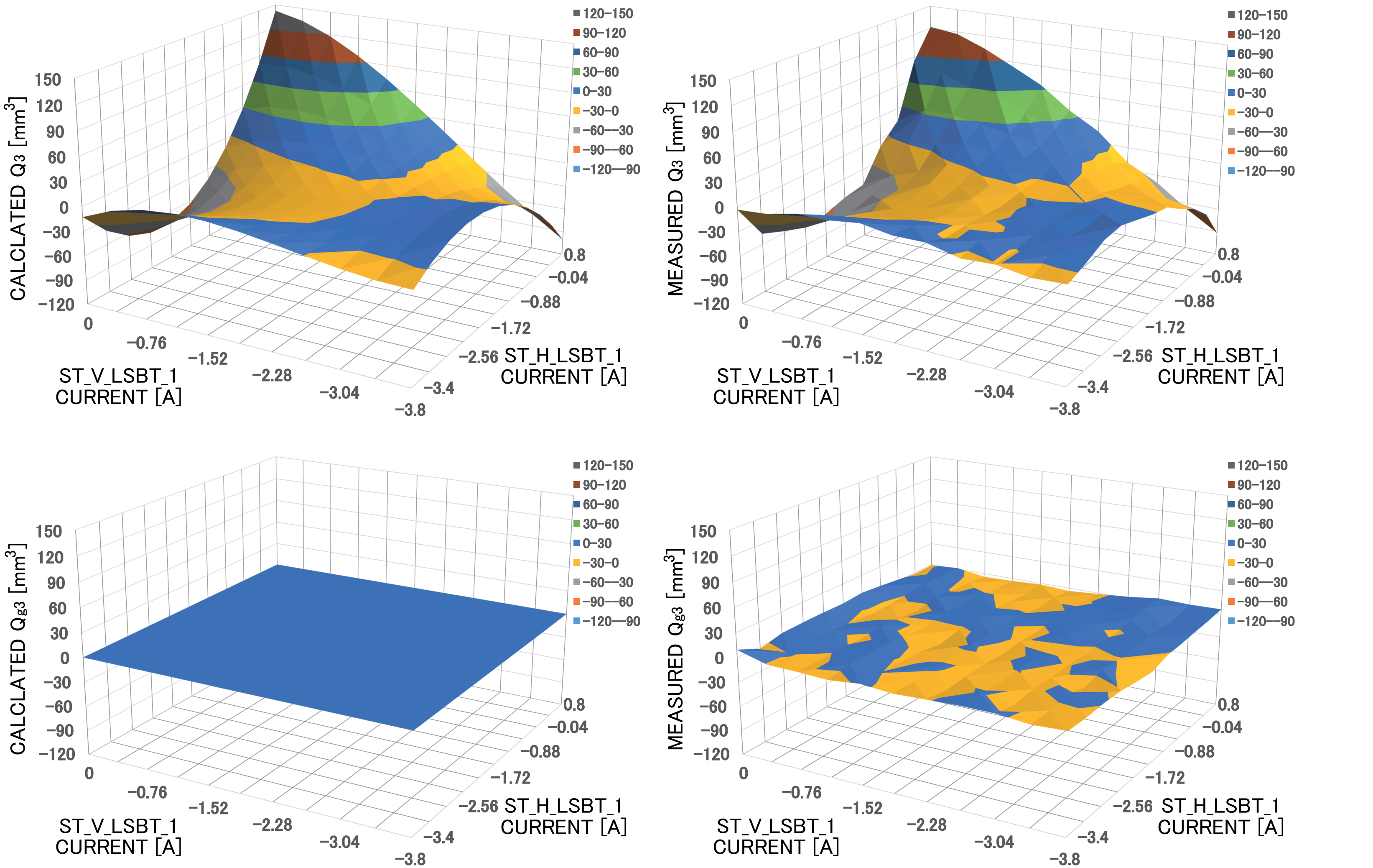
P2（上）及びPg2（下）のシミュレーション（左）と実測値（右）

⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正（全体較正の例）



Q2（上）及びQg2（下）のシミュレーション（左）と実測値（右）

⑥ビームベースドの較正と再帰的計算によるモーメント補正（全体較正の例）



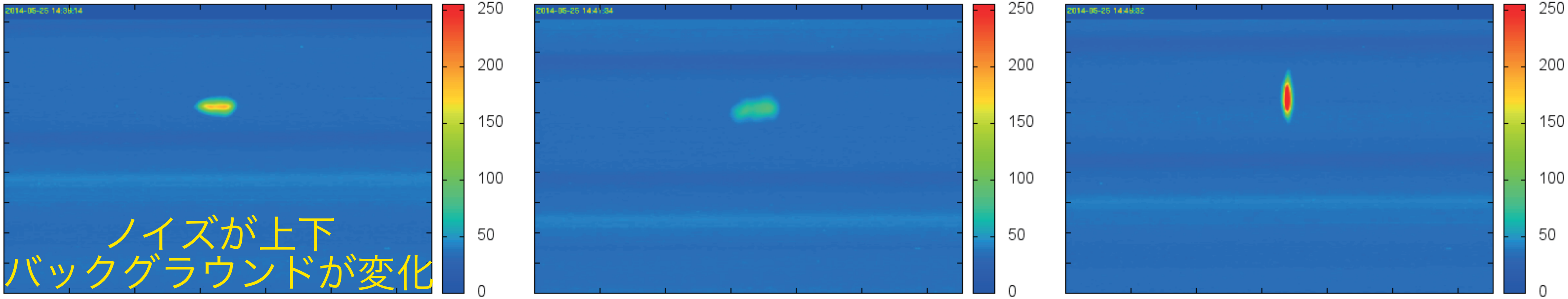
Q3（上）及びQg3（下）のシミュレーション（左）と実測値（右）　但し、Qg3≡0

⑦六電極BPMを用いたエミッタンス測定の試み

・何故、破壊型モニタ（プロファイルモニタやワイヤグリッドモニタ）では無くBPMか？
・ビーム形状により信号強度の飽和⇧・ノイズレベルまでの低下⇩が起こる
・機器のゲイン調整が大変面倒
・精度向上のため機器数増→測定時間増（ビーム破壊型のため）
⇒日々の計測には不向き（時間が掛かる・ボタン1押しで測定完了でない）

遠隔でゲインが調整出来ないカメラ

信号レベル低　　信号飽和



プロファイルモニタによるビーム形状の測定（8ビット処理後）

⑦六電極BPMを用いたエミッタンス測定の試み（Qスキャンによる）

・各BPM電極位置は各QM上流側ヨーク端面から約70mm上流にある

・Qスキャンの方法

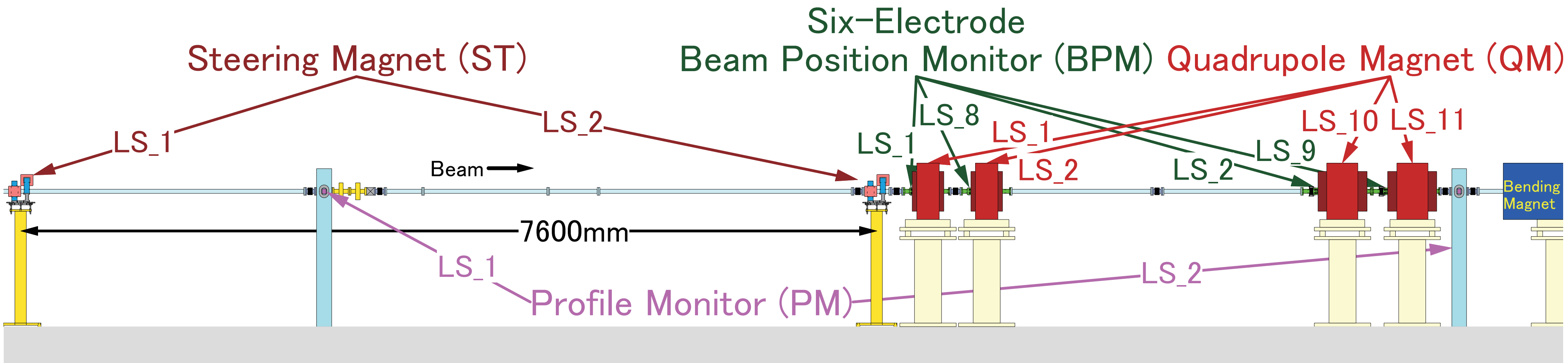
①QM4台電流値を変化させながらのBPM4台のP_{g2_Meas}を測定（計11セット）

②PM_LS_1地点でのエミッタンス＆ツイスパラメータを仮定すると

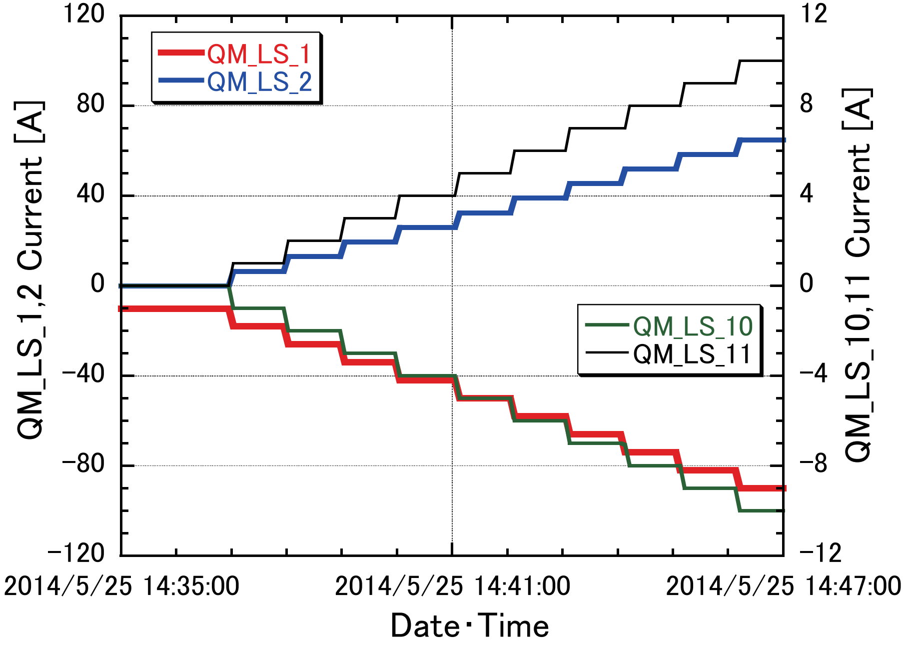
→PM_LS_1より下流側のビームサイズが計算できる（$\sigma_{H\_Calc}, \sigma_{V\_Calc}$）

ここで、$\sigma^2_{H\_Calc} - \sigma^2_{V\_Calc} = P_{g2\_Calc}$ となる

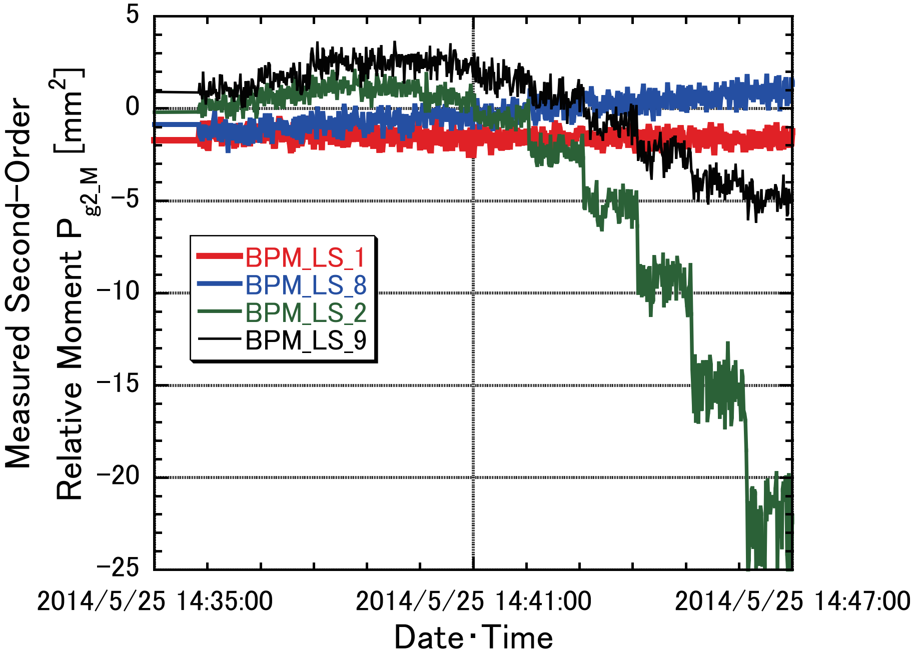
③ P_{g2_Calc} と P_{g2_Meas} の差分二乗和（11セット×4台=44点）が最小となるエミッタンス＆ツイスパラメータを探す



⑦六電極BPMを用いたエミッタンス測定の試み（Qスキャンによる）



四極電磁石（QM）電流値変化



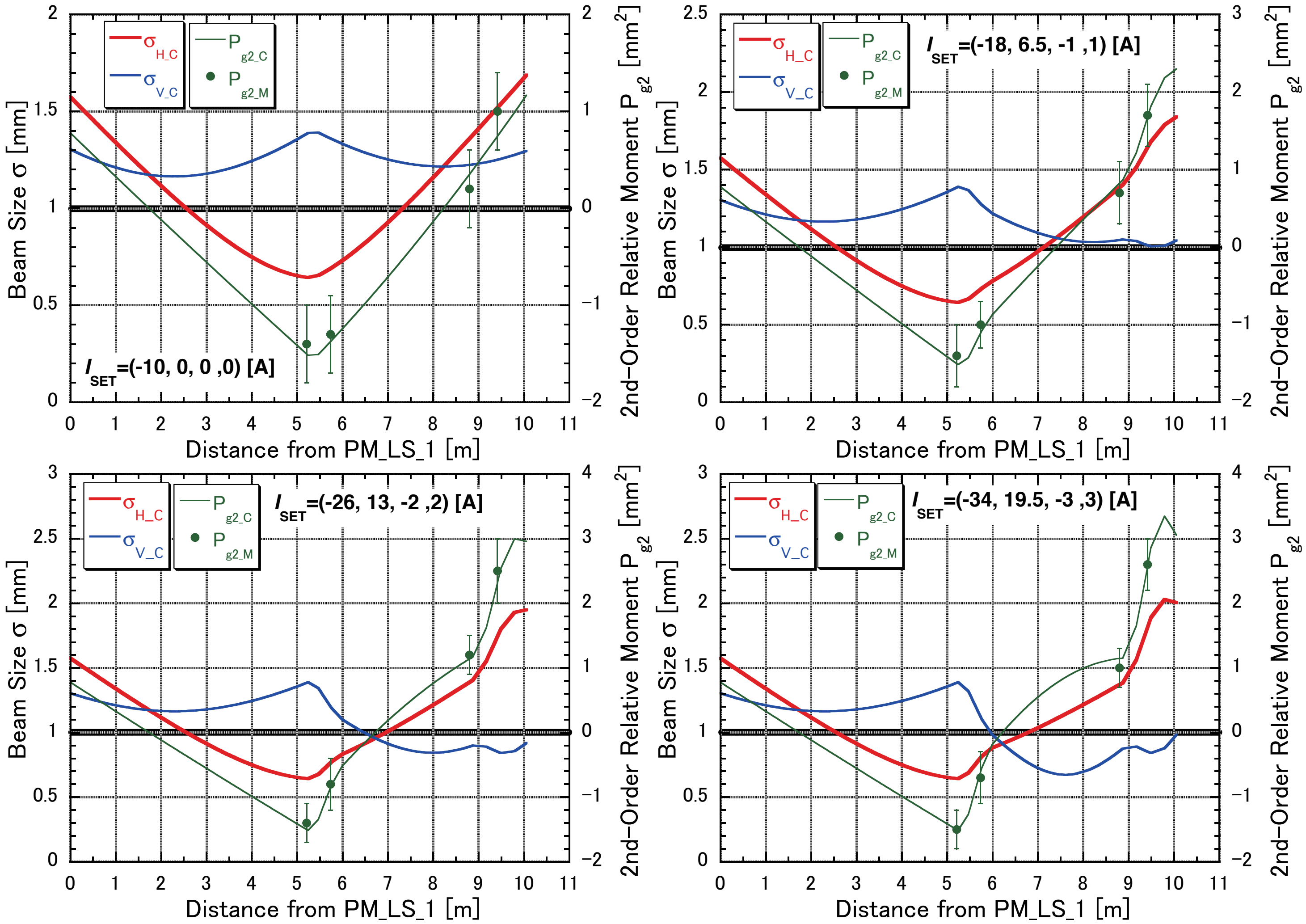
測定二次相対モーメント P_{g2_Meas} 変化

各セットはIset=（QM_LS_1電流値, QM_LS_2電流値, QM_LS_10電流値, QM_LS_11電流値）[A]で区別

Deduced Emittances and Twiss Parameters

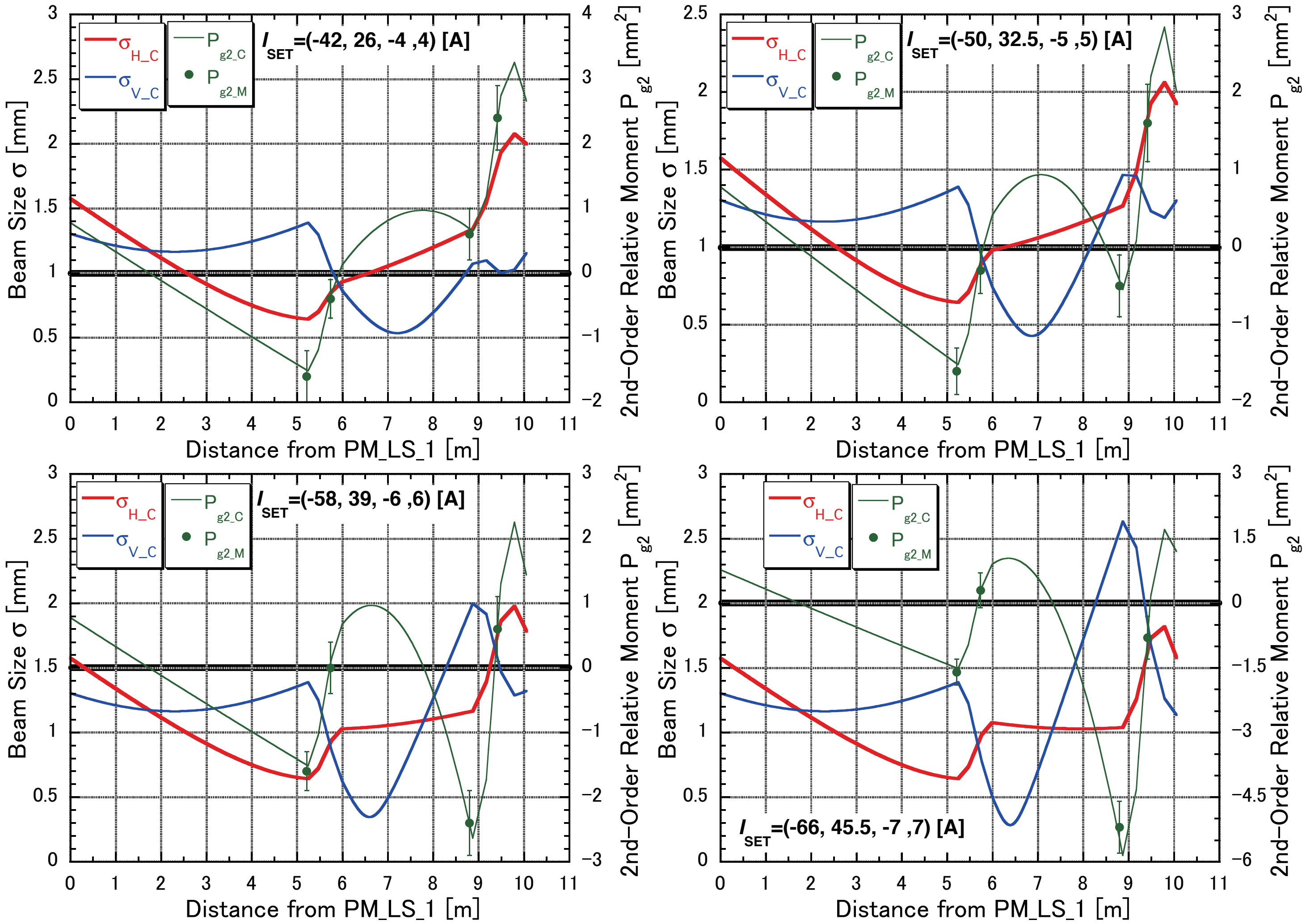
Parameter	Horizontal	Vertical
ε [πmm · mrad]	0.168 ± 0.002	0.299 ± 0.001
β [m]	14.7 ± 0.1	5.7 ± 0.2
α	2.25 ± 0.04	0.50 ± 0.03

⑦六電極BPMを用いたエミッタンス測定の試み（Qスキャンによる）



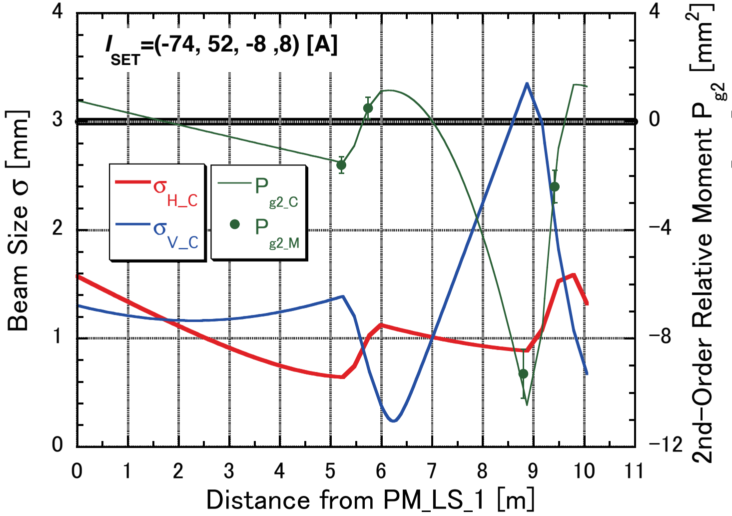
σ及びPg2を長手方向に表示したグラフ

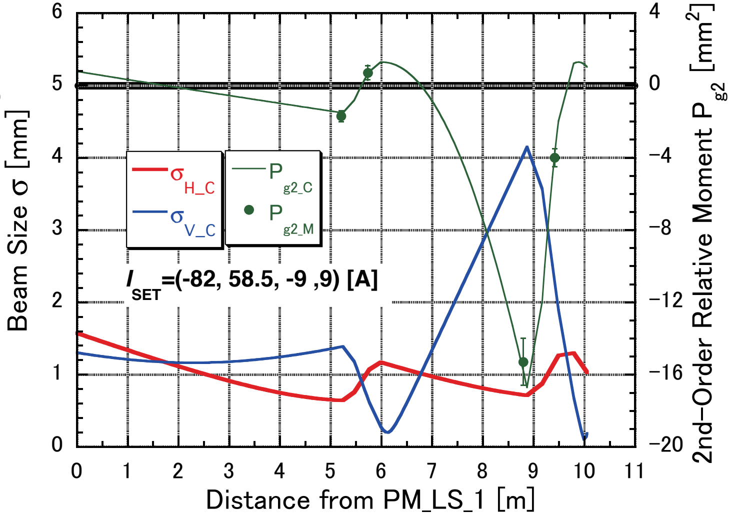
⑦六電極BPMを用いたエミッタンス測定の試み（Qスキャンによる）

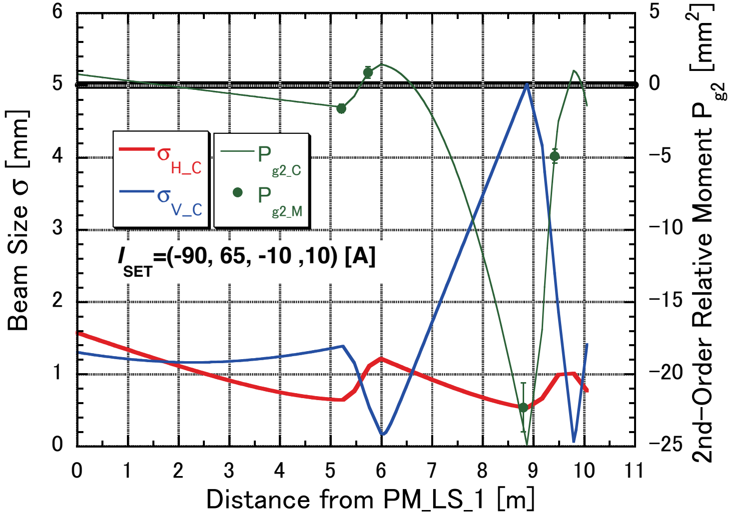


σ及びPg2を長手方向に表示したグラフ

⑦六電極BPMを用いたエミッタンス測定の試み（Qスキャンによる）



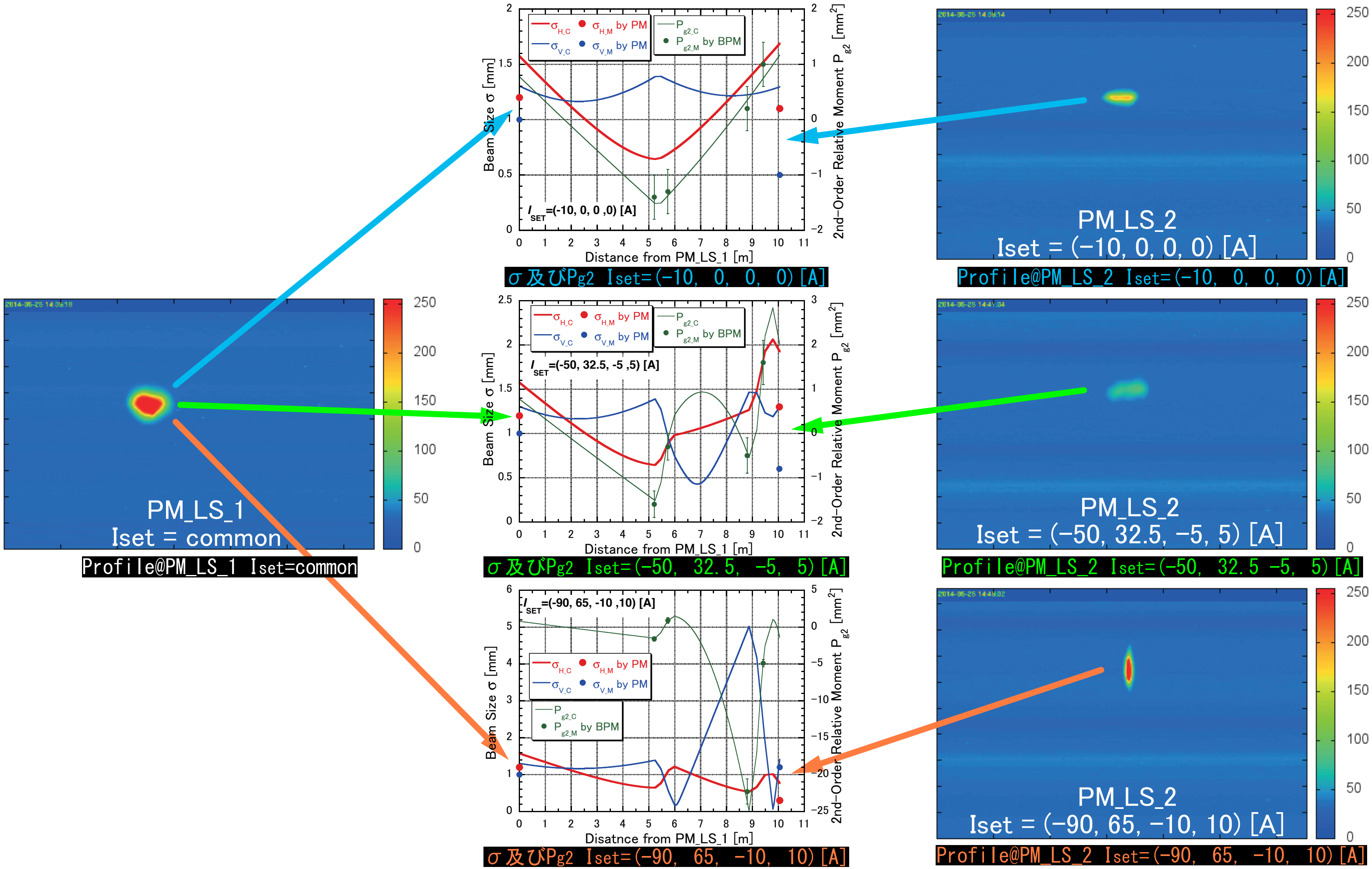




- ビームエネルギー975MeVの時、誤差が最小になる
- 全44測定点で測定誤差内で一致
  手法としては問題無い

σ及びP_{g2}を長手方向に表示したグラフ

⑦六電極BPMを用いたエミッタンス測定の試み（Qスキャンによる）



Qスキャンと同時にPMでのビーム形状を確認した→PMの方が若干小さい

まとめ

- SPring-8線型加速器で使用される静電ストリップライン型円形断面六電極BPMの横（Transverse ）方向及び縦（Longitudinal）の出力振幅解析を行った
  ①横方向は二次元静電場計算によりn次絶対モーメントの測定への寄与の大きさは
  実効開口半径のn乗に逆比例すると計算された
  ②縦方向は壁電流とストリップライン特性インピーダンスに比例し、
  ミクロバンチ波形そのままの時間構造の電圧が出力されることが判明した
- BPM信号処理回路のノイズレベルから測定電圧の誤差⊿V/V~0.001、P_1の分解能⊿P_1~0.005 [mm]及びQ_2の分解能⊿Q_2~0.077 [mm_2]程度と予想されたが、実際はそれより悪く、実測値として⊿V/V~0.003（測定値からの計算値）、⊿P_1~0.015 [mm]（測定値）及び⊿Q_2~0.232 [mm_2]（測定値からの計算値）が得られた
  但し、二次モーメントの分解能はエミッタンス測定には十分であると考える
- 電極チャンネル間の相対減衰率を求めるため、全体較正を行った
  ①P_1及びQ_1及が±5mm以内の領域で二次モーメントの計算誤差を$1mm^2$ 以下するには
  五次絶対モーメントまでの補正が必要
  ②信号電圧差分に五次絶対モーメントまで繰り込む場合、再帰的計算により
  解（相対モーメントの値）が求まることが判った
- 四極電磁石励磁量を変化させながら二次相対モーメントP_{g2}を測ること（Qスキャン）で、エミッタンスが測定可能な事を示した